UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 8/11/2023 - Tema 6

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

$(b; -a; 1; a)$, $a, b \in \mathbb{R}$ es solución del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$

Elegí la única opción que muestra los valores de a y de b.

A) $a = 5$ y $b = 2$. B) $a = 2$ y $b = 5$. C) $a = b = 5$. D) $a = b = 2$.

Opción correcta: B)
Resolución: si triangulás el sistema, vas a encontrar que es compatible determinado. Igualando coordenada a coordenada la solución obtenida con $(b; -a; 1; a)$ podrás obtener los valores de a y de b. Otro recorrido de resolución posible es tener en cuenta que como $(b; -a; 1; a)$ es una solución del sistema, debe cumplir cada ecuación y de ahí se puede deducir que $a = 2$ y luego que $b = 5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & k \\ 0 & k & 1 & 2 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ k & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

Elegí la única expresión que muestra el/los valores de k para que la matriz admita inversa.

A) $k \neq -3, k \neq 3, k \neq 0$
B) $k \neq 0$
C) $|k| = 3$
D) $k = 0$

Opción correcta: A)
Resolución: si calculás el determinante de la matriz, obtenés la expresión $-k^4 + 9k^2$. Las raíces de esta ecuación son los valores que anulan el determinante de la matriz A. A excepción de dichas raíces, k puede tomar cualquier valor real para que A admita inversa. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

U tiene una base de generadores de tres elementos y J es una transformación lineal que resulta un isomorfismo. Elegí la única opción que indica la dimensión del subespacio $J(U)$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Opción correcta: C)

Resolución: si T es una transformación lineal y se la aplicamos a un conjunto de vectores que forma una base, los transformados de estos vectores también forman una base, es decir un isomorfismo transforma bases en bases, por lo tanto el subespacio $J(U)$ tiene la misma dimensión que U. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

~~Considerá las transformaciones lineales~~ $\cancel{T(x_1; x_2) = (x_1 - 2x_2; -2x_1 - x_2)}$ ~~y~~
$\cancel{S(x_1; x_2) = (x_1 - x_2; x_1 + x_2)}$.
~~Elegí la opción que corresponde al determinante de la matriz asociada a~~ $\cancel{T^{-1} \circ S}$.

~~A)~~ $\cancel{-\frac{3}{2}}$ ~~B)~~ $\cancel{\frac{5}{2}}$ ~~C)~~ $\cancel{-\frac{5}{2}}$ ~~D)~~ $\cancel{\frac{3}{2}}$

Este ejercicio se da por correcto debido que hubo un error en las opciones ofrecidas.

~~Opción correcta: C)~~

~~Resolución: las expresiones matriciales de T y S son, respectivamente:~~ $\cancel{M_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$ ~~y~~ $\cancel{M_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$~~. Entonces tenemos que~~ $\cancel{M_S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$ ~~con lo cual~~ $\cancel{M_{T\circ S^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}$~~. Entonces:~~ $\cancel{\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -\frac{5}{2}}$~~.~~
~~Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.~~

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Considerá los números complejos $z = 5 - 5i$, $w = 10 - 4i$ y $u = \overline{z} \cdot Im(w) - 10 \cdot i^{19}$.
Indicá la única opción que muestra el módulo de u.

A) $5\sqrt{10}$ B) $10\sqrt{13}$ C) 500 D) $10\sqrt{5}$

Opción correcta: D)
Resolución: $u = (5 + 5i) \cdot (-4) - 10 \cdot i^{19} = -20 - 20i + 10i = -20 - 10i$
$|u| = \sqrt{(-20)^2 + (-10)^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá todos los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen la ecuación $3z^2 - 6z + 15 = 0$. Indicá cuál de las siguientes opciones es la única verdadera:

A) z se ubica en el segundo cuadrante.
B) $\pi < arg(-2z) < 2\pi$
C) $-2z$ se ubica en el cuarto cuadrante.
D) $\dfrac{\pi}{2} < arg(z^2) < \dfrac{3\pi}{2}$

Opción correcta: D)
Resolución: comenzamos resolviendo la ecuación cuadrática $3z^2 - 6z + 15 = 0$ de donde surgen dos soluciones $z = 1 + 2i$ y $z = 1 - 2i$. Como una de ellas se ubica en el cuarto cuadrante, ya podemos descartar la primera opción. Si multiplicamos por -2 a cada solución obtenemos los números complejos $-2 + 4i$ y $-2 - 4i$. Como estos se encuentran en el segundo y tercer cuadrante, respectivamente, la segunda y tercera opción resultan falsas. Por otro lado, si realizamos z^2 obtenemos $(1 \pm 2i)^2 = -3 \pm 4i$. Como estos complejos corresponden a dos números complejos que se ubican en el segundo y tercer cuadrante, la cuarta opción resulta verdadera. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

El polinomio $P(x) = -27x^4 + 18x^3 + 117x^2 - 9a^2x + 14b$ es divisible por $(9x^2 - 18)$.
Indica la única opción que muestra todos los valores posibles de a y b.

A) $a = -2$, $a = 2$, $b = -9$.
B) $|a| = 2$, $b = 9$.
C) $a = 2$, $b = -9$.
D) $a = 4$, $b = -126$.

Opción correcta: A)
Resolución: aplicamos el algoritmo de la división entre polinomios. Para que el resto sea el polinomio nulo, debe cumplirse $-9a^2 + 36 = 0$ y $14b + 126 = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)

  Considerá el polinomio $P(x) = x^5 - 7x^3 + 8x^2 - 56$.

  Indicá la única opción que muestra la factorización de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ de $P(x)$.

  A) $(x^3 + 8) \cdot (x - \sqrt{7}) \cdot (x + \sqrt{7})$.

  B) $(x^3 + 8) \cdot (x + 7) \cdot (x - 7)$.

  C) $(x + 2) \cdot (x - \sqrt{7}) \cdot (x + \sqrt{7}) \cdot (x - 1 - \sqrt{3}i) \cdot (x - 1 + \sqrt{3}i)$

  D) $(x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4) \cdot (x - \sqrt{7}) \cdot (x + \sqrt{7})$

  Opción correcta: D)

  Resolución: extrayendo factor común por grupos, podemos expresar $P(x) = (x^2 - 7) \cdot (x^3 + 8)$. Las raíces del primer factor son $x_1 = \sqrt{7}$ y $x_2 = -\sqrt{7}$. El segundo factor se anula para $x = -2$ y posee 2 raíces no reales. Dado que se pide la descomposición en factores irreducibles en$\mathbb{R}[x]$,la opción correcta es la última. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.