UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 8/11/2023 - Tema 4

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Considerá los números complejos z, w y u: $z = (3-i)^2$, $w = -10i$, $u = z^{-1} \cdot w^3$
Indicá la única opción que muestra la parte imaginaria del u.

A) -60 B) 60 C) -80 D) 80

Opción correcta: D)
Resolución: por un lado, $z^{-1} = ((3-i)^2)^{-1} = (10-6i)^{-1} = \frac{\overline{10-6i}}{|10-6i|^2} = \frac{8}{100} + \frac{6}{100}i$
Por otro lado, $w^3 = (-10i)^3 = -1000i^3 = -1000(-i) = 1000i$
Nos queda que $u = \left(\frac{8}{100} + \frac{6}{100}i\right) \cdot 1000i = -60 + 80i$. Luego, $Im(u) = 80$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Sea $z \neq 0$, uno de los números complejos que cumple la ecuación $\dfrac{z^6}{-1+\sqrt{3}i} = z^4 \cdot (-5-5i)$
Indicá la única opción que muestra el argumento de un complejo z solución de la ecuación.

A) $\dfrac{23\pi}{24}$ B) π C) $\dfrac{13\pi}{12}$ D) $\dfrac{7\pi}{12}$

Opción correcta: A)
Resolución: lo primero que podemos hacer es, usando que z es distinto de cero, reescribir la ecuación: $\frac{z^6}{-1+\sqrt{3}i} = z^4 \cdot (-5-5i) \to \frac{z^6}{z^4} = (-5-5i)(-1+\sqrt{3}i) \to z^2 = (-5-5i)(-1+\sqrt{3}i)$.
Luego, $arg(z^2) = arg(-5-5i) + arg(-1+\sqrt{3}i) = \frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{23\pi}{12}$.
Por lo tanto, como $arg(z^2) = 2 \cdot arg(z) + 2k\pi \to arg(z) = \frac{23\pi}{24} - k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Nos queda que $arg(z) = \frac{23\pi}{24}$ y $\frac{47\pi}{24}$ Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = (x-11)^2 \cdot (x^2+100) \cdot (x^2-11)$ .Indicá la única opción que muestra una afirmación correcta respecto de $P(x)$.

A) La expresión dada muestra la factorización en $\mathbb{Q}[x]$ de $P(x)$.

B) 11 es raíz triple de $P(x)$.

C) $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales que no posee raíces imaginarias.

D) La expresión dada muestra la factorización en $\mathbb{C}[x]$ de $P(x)$.

Opción correcta: A)
Resolución: igualando cada factor a cero podemos determinar las raíces de $P(x)$:
$x_1 = x_2 = 11,\ x_3 = 10i,\ x_4 = -10i,\ x_5 = \sqrt{11},\ x_6 = -\sqrt{11}$ por lo que afirmamos que 11 no es raíz triple, existen dos raíces imaginarias, y la factorización en $\mathbb{C}[x]$ de $P(x)$ es
$P(x) = (x+11)^2 \cdot (x-10i) \cdot (x+10i) \cdot (x-\sqrt{11}) \cdot (x+\sqrt{11})$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = 49x^4 - 28x^3 + 249x^2 - 140x + 20$, del cual se sabe que es divisible por $(7x^2+35)$. Indica la única afirmación correcta respecto de $P(x)$.

A) $P(x)$ posee 2 raíces reales distintas.

B) $P(x)$ no posee raíces reales.

C) $-\dfrac{2}{7}$ es raíz doble de $P(x)$.

D) $\dfrac{2}{7}$ es la única raíz real que posee $P(x)$.

Opción correcta: D)
Resolución: luego de aplicar el algoritmo de la división entre polinomios surge que $P(x) = (7x^2 + 35) \cdot \left(7x^2 - 4x + \frac{4}{7}\right)$. Las raíces del primer factor son $5i$ y $-5i$, y $\frac{2}{7}$ es raíz doble del segundo factor. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)

Dado el siguiente sistema no homogéneo $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 4 = 0 \end{cases}$

Elegí la única opción que muestra su conjunto solución.

A) $\{\alpha(0;1;1;0) + (1;-1;0;1), \alpha \in \mathbb{R}\}$

B) $\{(0;1;0;1)\}$

C) $\{\alpha(1;-1;0;1) + (0;1;1;0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

D) $\{(1;-1;0;1)\}$

Opción correcta: C)
Resolución: si escribís el sistema en forma matricial y lo triangulás, una posible solución es $(x_4; 1 - x_4; 1; x_4)$. De esta expresión podrás encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Elegí la opción que muestra un posible valor de k de manera tal que el determinante de la matriz A^2 sea 8281.

A) $-\dfrac{211}{29}$

B) No existe k que verifique las condiciones pedidas.

C) 290

D) 1

Opción correcta: D)
Resolución: el determinante de una matriz elevada al cuadrado equivale a elevar al cuadrado el determinante de la matriz. A partir de esta propiedad, bastará con encontrar que el determinante de la matriz dada es $29k - 120$, luego elevarlo al cuadrado e igualarlo a 8281 para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya expresión es $T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 + x_3; x_1 + x_2; x_1)$.
Elegí la opción que indica la dimensión de $Nu(T)$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 0

Opción correcta: D)

Resolución: la matriz asociada a T es: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como el el rango de esta matriz es tres tenemos que la $dim(Im(T)) = 3$ y por el teorema de la dimensión tenemos que $dim(Nu(T)) = 3 - dim(Im(T)) = 3 - 3 = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Considerá las transformaciones lineales $T(x_1; x_2) = (x_1 - x_2; x_1 + x_2)$ y
  $S(x_1; x_2) = (x_1 - 2x_2; 2x_1 + x_2)$.
  Elegí la opción que corresponde al determinante de la matriz asociada a $T \circ S$.

  A) 0　　B) 1　　C) 9　　D) 10

  Opción correcta: D)

  Resolución
  Las expresiones matriciales de T y S son, respectivamente: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M_S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
  Entonces $M_{T\circ S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ Luego: $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10$.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.