UBAXXI - Álgebra A - Resolución del 2do. parcial - 8/11/2023 - Tema 1

- Ejercicio 1 (1.25 puntos)

Dado el siguiente sistema no homogéneo $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 4 = 0 \end{cases}$

Elegí la única opción que muestra su conjunto solución.

A) $\{\alpha(1; -1; 1; 0) + (0; 1; 0; 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$

B) $\{(0; 1; 0; 1)\}$

C) $\{\alpha(0; 1; 0; 1) + (1; -1; 1; 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

D) $\{(1; -1; 1; 0)\}$

Opción correcta: A)
Resolución: si escribís el sistema en forma matricial y lo triangulás, una posible solución es $(x_3; 1 - x_3; x_3; 1)$. De esta expresión podrás encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1.25 puntos)

Considerá la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 7 & k & 8 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{N}$. Elegí la opción que muestra un posible valor de k de manera tal que el determinante de la matriz A^2 sea 8281.

A) 4098

B) 3

C) No existe k que verifique las condiciones pedidas.

D) 88

Opción correcta: B)
Resolución: el determinante de una matriz elevada al cuadrado equivale a elevar al cuadrado el determinante de la matriz. A partir de esta propiedad, bastará con encontrar que el determinante de la matriz dada es $2k+85$, luego elevarlo al cuadrado e igualarlo a 8281 para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 3 (1.25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \leftarrow \mathbb{R}^3$ cuya expresión es:
$T(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_1 + x_2; x_1 + x_2 + x_3)$.
Elegí la opción que indica la dimensión de $Im(T)$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Opción correcta: C)

Resolución: la matriz asociada a T es: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Como el rango de esta matriz es tres tenemos que la $dim(Im(T)) = 3$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 11.

- Ejercicio 4 (1.25 puntos)

Considerá las transformaciones lineales $T(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2)$ y $S(x_1; x_2) = (x_1 + 2x_2; 2x_1 + x_2)$. Elegí la opción que corresponde al determinante de la matriz asociada a $T \circ S$.

A) 0 B) 3 C) 6 D) 9

Opción correcta: C)

Resolución: las expresiones matriciales de T y S son, respectivamente: $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $M_{T\circ S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Luego: $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 6$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1.25 puntos)
  Considerá los números complejos z, w y u tales que $z = (1-2i)^2$, $w = -5i$, $u = z^{-1} \cdot w^3$
  Indicá la única opción que muestra la parte real de u.

A) 15 B) -15 C) -20 D) 20

Opción correcta: C)

Resolución: por un lado, $z^{-1} = ((1-2i)^2)^{-1} = (-3-4i)^{-1} = \frac{-3+4i}{(-3-4i)(-3+4i)} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$.
Además, $w^3 = (-5i)^3 = -125i^3 = -125(-i) = 125i$. Luego: $u = \left(-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right) \cdot 125i = -20 - 15i$.
Entonces $Re(u) = -20$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1.25 puntos)
  Sea $z \neq 0$, uno de los números complejos que cumple la ecuación $\dfrac{z^6}{1-\sqrt{3}i} = z^4 \cdot (6-6i)$
  Indicá la única opción que muestra el argumento de un complejo z solución de la ecuación.

A) $\dfrac{7\pi}{12}$ B) $\dfrac{17\pi}{24}$ C) π D) $\dfrac{13\pi}{12}$

Opción correcta: B)

Resolución: lo primero que podemos hacer es reescribir la ecuación: $\frac{z^6}{1-\sqrt{3}i} = z^4 \cdot (6-6i)$
$\rightarrow \frac{z^6}{z^4} = (6-6i) \cdot (1-\sqrt{3}i) \rightarrow z^2 = (6-6i)(1-\sqrt{3}i)$.
Luego, $arg(z^2) = arg(6-6i) + arg(1-\sqrt{3}i) = \frac{7\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - 2\pi = \frac{17\pi}{12}$.
Por lo tanto, como $arg(z^2) = 2 \cdot arg(z) + 2k\pi \rightarrow arg(z) = \frac{17\pi}{24} - k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Nos queda que $arg(z) = \frac{17\pi}{24}$ y $\frac{41\pi}{24}$ Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1.25 puntos)
  Considerá el polinomio $P(x) = (x-7)^2 \cdot (x^2+121) \cdot (x^2-7)$.
  Indicá la única opción que muestra una afirmación correcta respecto de $P(x)$.

A) 7 es raíz triple de $P(x)$.
B) La expresión dada muestra la factorización en $\mathbb{Q}[x]$ de $P(x)$.
C) $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales que no posee raíces imaginarias.
D) La expresión dada muestra la factorización en $\mathbb{C}[x]$ de $P(x)$.

Opción correcta: B)

Resolución: igualando cada factor a cero podemos determinar las raíces de $P(x)$: $x_1 = x_2 = 7$, $x_3 = 11i,\ x_4 = -11i,\ x_5 = \sqrt{7},\ x_6 = -\sqrt{7}$ por lo que afirmamos que 7 no es raíz triple, existen dos raíces imaginarias, y la factorización en $\mathbb{C}[x]$ es $P(x) = (x-7)^2 \cdot (x-11i) \cdot (x+11i) \cdot (x-\sqrt{7}) \cdot (x+\sqrt{7})$.
La expresión dada corresponde a la descomposición en factores irreducibles de $P(x)$ pero en $\mathbb{Q}[x]$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1.25 puntos)
  Considerá el polinomio $A(x) = 49x^4 - 28x^3 + 151x^2 - 84x + 12$, del cual se sabe que es divisible por $(7x^2 + 21)$. Indica la única afirmación correcta respecto de $A(x)$.

  A) $A(x)$ posee 2 raíces reales distintas.

  B) $A(x)$ no posee raíces reales.

  C) $-\dfrac{2}{7}$ es raíz doble de $A(x)$.

  D) $\dfrac{2}{7}$ es la única raíz real que posee $A(x)$.

  Opción correcta: D)
  Resolución: luego de aplicar el algoritmo de la división entre polinomios surge que
  $A(x) = (7x^2 + 21) \cdot \left(7x^2 + 4x + \frac{4}{7}\right)$. Las raíces del primer factor son $3i$ y $-3i$, y $-\frac{2}{7}$ es raíz doble del segundo factor. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.