

- Ejercicio 1 (1,25 puntos)  
 Considerá el complejo

$$z = \frac{-10 + 10i}{(-1 - \sqrt{3}i) \cdot (-10i^7)}$$

Indicá la única opción que muestra el argumento de  $z$ .

A)  $\frac{13\pi}{12}$   
 B)  $\frac{11\pi}{6}$

C)  $\frac{11\pi}{12}$   
 D)  $\frac{\pi}{12}$

Respuesta: C)

Resolución

Para simplificar el ejercicio podemos comenzar por realizar las cuentas del denominador de la fracción a analizar. Usando que  $i^7 = -i$  y haciendo el producto nos queda:

$z = \frac{-10+10i}{10\sqrt{3}-10i}$ . Una vez obtenido este cálculo parcial, podemos o realizar la división o bien usar las propiedades de los argumentos para el cociente de dos complejos. Como el argumento de  $-10 + 10i$  resulta  $\frac{3\pi}{4}$  y el argumento de  $10\sqrt{3} - 10i$  es  $\frac{11\pi}{6}$ , podemos saber que  $z$  tendrá un argumento que surja de la resta entre estos ángulos, lo que nos da, ajustando el resultado al rango entre 0 y  $2\pi$ , el número real  $\frac{11\pi}{12}$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

- Ejercicio 2 (1,25 puntos)

Sea  $z$  un número complejo que satisface la ecuación  $Re(z) \cdot (z + 5) = 5 \cdot (90 - 2Re(z)) - 90i$   
 Indicá cuál es la única opción que muestra la forma binómica de un  $z$  posible.

A)  $-30 + 3i$   
 B)  $15 + 6i$

C)  $30 - 90i$   
 D)  $30 + 30i$

Respuesta: A)

Resolución

Comenzamos reemplazando en la ecuación del enunciado,  $a = Re(z)$ ,  $b = Im(z)$  y por consiguiente  $z = a + bi$ , nos queda:  $a(a + bi + 5) = 5(90 - 2a) - 90i$

Ahora, realizando las operaciones indicadas reducimos a una ecuación equivalente:  $a^2 + abi + 5a = 450 - 10a - 90i$ . Usando que “dos números complejos son iguales si coinciden en partes reales e imaginarias respectivamente”, planteamos dos ecuaciones:  $a^2 + 5a = 450 - 10a$  y  $ab = -90$ . La primera resulta ser una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son  $-30$  y  $15$ ; con esta información podemos ir a la segunda y obtener  $b = 3$  o  $b = -6$  respectivamente, por lo que  $z = -30 + 3i$  o bien  $z = 15 - 6i$ . Buscando entre las opciones la única posible es la A). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

- Ejercicio 3 (1,25 puntos)

Considerá los polinomios  $A(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 30x - 240$  y  $B(x) = x^2 + a$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ .  
 Se sabe que  $-4i$  es raíz de  $B(x)$ .

Indicá la única opción que muestra el resto de la división de  $A(x)$  por  $B(x)$ .

A)  $2x - 480$   
 B)  $-480$

C)  $2x$   
 D)  $0$

Respuesta: C)

Resolución

Si  $-4i$  es raíz de  $B(x)$ , entonces  $a = 16$ . Luego, aplicando el algoritmo de la división de polinomios entre  $A(x)$  y  $B(x) = x^2 + 16$  obtenemos el cociente y el resto. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

---

---

- Ejercicio 4 (1,25 puntos)

Considerá el polinomio  $P(x) = x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 10x + 20$ . Se sabe que  $1 - \sqrt{3}i$  es raíz del polinomio. Indicá cuál es la única opción que muestra todas las raíces complejas de  $P(x)$ .

- A)  $\sqrt{5}i; -\sqrt{5}i; 1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i$
- B)  $5i; -5i; 1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i$
- C)  $\sqrt{5}; -\sqrt{5}; 1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}$
- D)  $5; -5; 1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i$

Respuesta: A)

Resolución

Si  $1 - \sqrt{3}i$  es raíz de  $P(x)$ , también lo es su conjugado  $1 + \sqrt{3}i$ .  $P(x)$  será divisible entonces por  $(x - (1 - \sqrt{3}i)) \cdot (x - (1 + \sqrt{3}i))$  que es equivalente a  $x^2 - 2x + 4$ . El cociente entre  $P(x)$  y dicho trinomio es  $x^2 + 5$ , cuyas raíces,  $\sqrt{5}i$  y  $-\sqrt{5}i$ , también son raíces de  $P(x)$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

---

- Ejercicio 5 (1,25 puntos)

Si  $A, B, C$  son matrices de  $3 \times 3$  tales que:  $\det(B) = 17$ ,  $A = 2B + BC^t$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,

elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz  $A$ .

- A)  $-935$
  - B)  $-55$
  - C)  $-99$
  - D)  $-13464$
- Respuesta: A)

Resolución

Como la matriz  $B$  es un factor común en la igualdad  $A = 2B + BC^t$ , podés expresar dicha matriz como  $A = B(2 \cdot I + C^t)$ . Y, luego, aplicando las propiedades de los determinantes, calcular  $\det(A) = \det(B) \cdot \det(2 \cdot I + C^t)$ . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

---

- Ejercicio 6 (1,25 puntos)

Elegí la única opción que indica el/los valor/es de  $k$  para el/los cual/es el sistema

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  admite solución única.

- A)  $k \neq 0, k \neq 2$
  - B)  $k \in [0, 2]$
  - C) Para ningún valor de  $k$ .
  - D)  $k = 0, k = 2$
- Respuesta: A)

Resolución

Al triangular la matriz  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{pmatrix}$  y expresarla como  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-2k+3}{2} \\ 0 & 0 & 4k - 2k^2 \end{pmatrix}$  podrás comprobar que solo con  $k \neq 0, k \neq 2$  el sistema admite solución única. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8, 9 y 10.

---

- Ejercicio 7 (1,25 puntos)

Considerá la transformación lineal  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$T(x_1; x_2; x_3; x_4) = (x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4; x_1 + x_2; 3x_3 + x_4; 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_4)$$

Elegí la opción que muestra la dimensión del núcleo de  $T$ .

- A) 0
  - B) 1
  - C) 2
  - D) 3
- Respuesta: C)

Resolución

Igualando el vector imagen al vector nulo tenemos

$$(x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4; x_1 + x_2; 3x_3 + x_4; 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_4) = (0; 0; 0; 0)$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que el núcleo de  $T$  está generado por  $(1; -1; 0; 0)$  y  $(0; 0; 1; -3)$ . Por lo tanto la dimensión del núcleo es dos. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

---

- Ejercicio 8 (1,25 puntos)

Considerá la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (-x_1 + x_2 - x_3; 5x_1 - 2x_3; 6x_1 + x_2 - 4x_3)$$

Si  $C$  representa el cubo unitario, elegí la opción que muestra el volumen de la imagen de  $C$  por  $T$ .

A) 5

C) 1

Respuesta: C)

B) -1

D) -5

Resolución

Armos la matriz asociada a  $T$  que es  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ . Calculando el determinante de esta matriz tenemos que es 1. Y como Volumen de  $T(C) = (\text{Volumen de } C) |\det(A_T)|$  tenemos la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

---