UBAXXI - Álgebra A - 2do. Parcial - 08/11/2023 - Tema 11: resolución

- Ejercicio 1 (1,25 puntos)
  Sea
$$z = \frac{10-10i}{(-1-\sqrt{3}i)\cdot(-10i^9)}$$
Indicá la única opción que muestra el argumento de z.

A) $\frac{11\pi}{12}$ C) $\frac{5\pi}{12}$
B) $\frac{5\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{12}$

Respuesta: A)

Resolución
Para simplificar el ejercicio podemos comenzar por realizar las cuentas del denominador de la fracción a analizar. Usando que $i^9 = i$ y haciendo el producto nos queda: $z = \frac{10-10i}{-10\sqrt{3}+10i}$. Una vez obtenido este cálculo parcial, podemos o realizar la división o bien usar las propiedades de los argumentos para el cociente de dos complejos. Como el argumento de $10-10i$ resulta $\frac{7\pi}{4}$ y el argumento de $-10\sqrt{3}+10i$ es $\frac{5\pi}{6}$, podemos saber que z tendrá un argumento que surja de la resta entre estos ángulos, lo que nos da, ajustando el resultado al rango entre 0 y 2π, el número real $\frac{11\pi}{12}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1,25 puntos)
  Sea z un número complejo que satisface la ecuación $Re(z)\cdot(1+z) = 2\cdot(23Re(z)-225)-90i$
Indicá cuál es la única opción que muestra la forma binómica de un z posible.

A) $30+3i$ C) $15-6i$
B) $15+30i$ D) $30-90i$

Respuesta: C)

Resolución
Comenzamos reemplazando en la ecuación del enunciado, $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ y por consiguiente $z = a+bi$. Nos queda lo siguiente:$a(1+a+bi) = 2(23a-225)-90i$
Ahora, realizando las operaciones indicadas reducimos a una ecuación equivalente: $a+a^2+abi = 46a-450-90i$. Usando que "dos números complejos son iguales si coinciden en partes reales e imaginarias respectivamente", planteamos dos ecuaciones: $a^2+a = 46a-450$ y $ab = -90$. La primera resulta ser una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son 30 y 15; con esta información podemos ir a la segunda y obtener $b=-3$ o $b=-6$ respectivamente, por lo que $z = 30-3i$ o bien $z = 15-6i$. Buscando entre las opciones la única posible es la C).
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1,25 puntos)
  Considerá los polinomios $P(x) = x^4+x^3+19x^2+20x+150$ y $Q(x) = x^2+a$, donde $a \in \mathbb{R}$.
Se sabe que $-5i$ es raíz de $Q(x)$. Indicá la única opción que muestra el resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$.

A) $-5x+300$ C) 0
B) 300 D) $-5x$

Respuesta: A)

Resolución
Si $-5i$ es raíz de $Q(x)$, entonces $a = 25$. Luego, aplicando el algoritmo de la división de polinomios entre $P(x)$ y $Q(x) = x^2+25$ obtenemos el cociente y el resto. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1,25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 14x + 28$. Se sabe que $1 + \sqrt{3}i$ es raíz del polinomio. Indicá cuál es la única opción que muestra todas las raíces complejas de $P(x)$.

A) $1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i; \sqrt{7}; -\sqrt{7}$

B) $1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}; 7i; -7i$

C) $1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i; \sqrt{7}i; -\sqrt{7}i$

D) $1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i; 7i; -7i$

Respuesta: C)

Resolución

Si $1 + \sqrt{3}i$ es raíz de $P(x)$, también lo es su conjugado $1 - \sqrt{3}i$. $P(x)$ será divisible entonces por $(x - (1 + \sqrt{3}i)) \cdot (x - (1 - \sqrt{3}i))$ que es equivalente a $x^2 - 2x + 4$. El cociente entre $P(x)$ y dicho trinomio es $x^2 + 7$, cuyas raíces, $\sqrt{7}i$ y $-\sqrt{7}i$, también son raíces de $P(x)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1,25 puntos)

Si A, B, C son matrices de 3×3 tales que: $\det(B) = 11$, $A = 2B + BC^t$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz A.

A) 8712

B) 141

C) 99

D) 1551

Respuesta: D)

Resolución

Como la matriz B es un factor común en la igualdad $A = 2B + BC^t$, podés expresar dicha matriz como $A = B(2 \cdot I + C^t)$. Y, luego, aplicando las propiedades de los determinantes, calcular $\det(A) = \det(B) \cdot \det(2 \cdot I + C^t)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 6 (1,25 puntos)

Elegí la única opción que indica el/los valor/es de k para el/los cual/es el sistema $\begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ admite solución única.

A) $k = 1, k = -1$

B) $k \in [-1, 1]$

C) $k \neq 1, k \neq -1$

D) Para ningún valor de k.

Respuesta: C)

Resolución

Al triangular la matriz $\begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & k \end{pmatrix}$ y expresarla como $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & k-1 \\ 0 & 0 & \frac{1-k^2}{2} \end{pmatrix}$ podrás comprobar que solo con $k \neq 1, k \neq -1$ el sistema admite solución única. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8, 9 y 10.

- Ejercicio 7 (1,25 puntos)
  Considerá $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2 + x_3; -2x_2 + x_3)$$

Elegí la opción que muestra la dimensión de la imagen de T.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

Respuesta: C)

Resolución
Igualando el vector imagen al vector nulo tenemos $(x_1 + x_2, x_1 - x_2 + x_3, -2x_2 + x_3) = (0, 0, 0)$ de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que el núcleo de T está generado por $(1; -1; -2)$. Por lo tanto la dimensión del núcleo es uno. Por el Teorema de la dimensión sabemos que $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = 3$, con lo cual la dimensión de la imagen será dos.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 8 (1,25 puntos)
  Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (-2x_1 + x_2 + x_3; 2x_1 + 3x_3; 5x_1 + x_2 - 3x_3)$$

Si C representa el cubo unitario, elegí la opción que muestra el volumen de la imagen de C por T.

A) 58
B) -29
C) 29
D) -58

Respuesta: C)

Resolución
Armamos la matriz asociada a T que es $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculando el determinante de esta matriz tenemos que es 29. Y como Volumen de $T(C)$ = (Volumen de C) $|\det(A_T)|$ tenemos la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.
