
- Ejercicio 1 (1,25 puntos)

Si A, B, C son matrices de 3×3 tales que: $\det(B) = 17$, $A = 2B + BC^t$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$,
elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz A.

A) -935
B) -55
C) -99
D) -13464

Respuesta: A)

Resolución
Como la matriz B es un factor común en la igualdad $A = 2B + BC^t$, podés expresar dicha matriz como $A = B(2 \cdot I + C^t)$. Y, luego, aplicando las propiedades de los determinantes, calcular $\det(A) = \det(B) \cdot \det(2 \cdot I + C^t)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 2 (1,25 puntos)

Elegí la única opción que indica el/los valor/es de k para el/los cual/es el sistema
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ admite solución única.

A) $k \neq 0, k \neq 2$
B) $k \in [0, 2]$
C) Para ningún valor de k.
D) $k = 0, k = 2$

Respuesta: A)

Resolución
Al triangular la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{pmatrix}$ y expresarla como $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-2k+3}{2} \\ 0 & 0 & 4k - 2k^2 \end{pmatrix}$ podrás comprobar que solo con $k \neq 0, k \neq 2$ el sistema admite solución única. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 8, 9 y 10.

- Ejercicio 3 (1,25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3; x_4) = (x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4; x_1 + x_2; 3x_3 + x_4; 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_4)$$

Elegí la opción que muestra la dimensión del núcleo de T.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

Respuesta: C)

Resolución
Igualando el vector imagen al vector nulo tenemos
$(x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4; x_1 + x_2; 3x_3 + x_4; 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_4) = (0; 0; 0; 0)$
de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que el núcleo de T está generado por $(1; -1; 0; 0)$ y $(0; 0; 1; -3)$. Por lo tanto la dimensión del núcleo es dos. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 4 (1,25 puntos)
  Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (-x_1 + x_2 - x_3; 5x_1 - 2x_3; 6x_1 + x_2 - 4x_3)$$

Si C representa el cubo unitario, elegí la opción que muestra el volumen de la imagen de C por T.

A) 5
B) -1
C) 1
D) -5

Respuesta: C)

Resolución
Armamos la matriz asociada a T que es $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Calculando el determinante de esta matriz tenemos que es 1. Y como Volumen de $T(C)$ = (Volumen de C) $|\det(A_T)|$ tenemos la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1,25 puntos)
  Considerá el complejo

$$z = \frac{-10 + 10i}{(-1 - \sqrt{3}i) \cdot (-10i^7)}$$

Indicá la única opción que muestra el argumento de z.

A) $\frac{13\pi}{12}$
B) $\frac{11\pi}{6}$
C) $\frac{11\pi}{12}$
D) $\frac{\pi}{12}$

Respuesta: C)

Resolución
Para simplificar el ejercicio podemos comenzar por realizar las cuentas del denominador de la fracción a analizar. Usando que $i^7 = -i$ y haciendo el producto nos queda: $z = \frac{-10+10i}{10\sqrt{3}-10i}$. Una vez obtenido este cálculo parcial, podemos o realizar la división o bien usar las propiedades de los argumentos para el cociente de dos complejos. Como el argumento de $-10+10i$ resulta $\frac{3\pi}{4}$ y el argumento de $10\sqrt{3} - 10i$ es $\frac{11\pi}{6}$, podemos saber que z tendrá un argumento que surja de la resta entre estos ángulos, lo que nos da, ajustando el resultado al rango entre 0 y 2π, el número real $\frac{11\pi}{12}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1,25 puntos)
  Sea z un número complejo que satisface la ecuación $Re(z) \cdot (z + 5) = 5 \cdot (90 - 2Re(z)) - 90i$
  Indicá cuál es la única opción que muestra la forma binómica de un z posible.

A) $-30 + 3i$
B) $15 + 6i$
C) $30 - 90i$
D) $30 + 30i$

Respuesta: A)

Resolución
Comenzamos reemplazando en la ecuación del enunciado, $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ y por consiguiente $z = a + bi$, nos queda:$a(a + bi + 5) = 5(90 - 2a) - 90i$
Ahora, realizando las operaciones indicadas reducimos a una ecuación equivalente: $a^2 + abi + 5a = 450 - 10a - 90i$. Usando que "dos números complejos son iguales si coinciden en partes reales e imaginarias respectivamente", planteamos dos ecuaciones:$a^2 + 5a = 450 - 10a$ y $ab = -90$. La primera resulta ser una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son -30 y 15; con esta información podemos ir a la segunda y obtener $b = 3$ o $b = -6$ respectivamente, por lo que $z = -30 + 3i$ o bien $z = 15 - 6i$. Buscando entre las opciones la única posible es la A). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1,25 puntos)
  Considerá los polinomios $A(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 30x - 240$ y $B(x) = x^2 + a$, donde $a \in \mathbb{R}$.
  Se sabe que $-4i$ es raíz de $B(x)$.
  Indicá la única opción que muestra el resto de la división de $A(x)$ por $B(x)$.

  A) $2x - 480$
  B) -480
  C) $2x$
  D) 0

  Respuesta: C)

  Resolución
  Si $-4i$ es raíz de $B(x)$, entonces $a = 16$. Luego, aplicando el algoritmo de la división de polinomios entre $A(x)$ y $B(x) = x^2 + 16$ obtenemos el cociente y el resto. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1,25 puntos)
  Considerá el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 10x + 20$. Se sabe que $1 - \sqrt{3}i$ es raíz del polinomio.
  Indicá cuál es la única opción que muestra todas las raíces complejas de $P(x)$.

  A) $\sqrt{5}i; -\sqrt{5}i; 1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i$
  B) $5i; -5i; 1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i$
  C) $\sqrt{5}; -\sqrt{5}; 1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}$
  D) $5; -5; 1 + \sqrt{3}i; 1 - \sqrt{3}i$

  Respuesta: A)

  Resolución
  Si $1 - \sqrt{3}i$ es raíz de $P(x)$, también lo es su conjugado $1 + \sqrt{3}i$. $P(x)$ será divisible entonces por $(x - (1 - \sqrt{3}i)) \cdot (x - (1 + \sqrt{3}i))$ que es equivalente a $x^2 - 2x + 4$. El cociente entre $P(x)$ y dicho trinomio es $x^2 + 5$, cuyas raíces, $\sqrt{5}i$ y $-\sqrt{5}i$, también son raíces de $P(x)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
