

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

Dado el conjunto $\{(1, 2, 3, 1, 1), (\alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma, 3, 2), (1, 2, 3, 2, 1)\}$.
Elegí la terna de valores α, β, γ para que este conjunto sea linealmente dependiente.

A) $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = -4$

C) $\alpha = -2, \beta = -2, \gamma = 4$

B) $\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = 4$

D) $\alpha = -2, \beta = 2, \gamma = 4$

Opción correcta: D)

Resolución

Para que este conjunto genere un subespacio de dimensión 2 debe ocurrir que el conjunto sea linealmente dependiente. Si planteamos la combinación lineal $(1, 2, 3, 1, 1) + (1, 2, 3, 2, 1) = (2, 4, 6, 3, 2)$ podemos concluir que $(2, 4, 6, 3, 2) = (\alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma, 3, 2)$ de donde obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 4 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 6 \end{cases}$$

La única terna que es solución del sistema es $\alpha = -2, \beta = 2, \gamma = 4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Elegí la opción que ofrece el valor de k para que el vector $(-5, 1, k)$ sea combinación lineal de $(1, 1, -1)$ y $(2, -1, 1)$.

A) $k = 1$

B) $k = -1$

C) $k = -3$

D) $k = 3$

Opción correcta: B)

Resolución

Para que $(-5, 1, k)$ sea combinación lineal de $(1, 1, -1)$ y $(2, -1, 1)$ debe ocurrir que $\alpha(1, 1, -1) + \beta(2, -1, 1) = (-5, 1, k)$, de las dos primeras coordenadas tenemos que:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -5 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

resolviendo este sistema tenemos que $\alpha = -1, \beta = -2$. Entonces con esto y la tercer coordenada tenemos que $(-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = k$ o sea que $k = -1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

Considerá las circunferencias de ecuación: $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 14x - 6y + 53 = 0\}$ y $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 5x + 2y + 1 = 0\}$. Elegí la única opción que muestra la ecuación de la circunferencia C_3 que tiene el mismo centro que C_1 y el mismo radio que C_2 .

A)

$$(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4}$$

C)

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{5}$$

B)

$$(x + 7)^2 + (y + 3)^2 = 6,25$$

D)

$$(x - 2,5)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

Opción correcta: A)

Resolución

Completando cuadrados obtenemos las expresiones canónicas $C_1 : (x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 5$ y $C_2 : (x - 2,5)^2 + (y + 1)^2 = 6,25$, podemos decir entonces que C_3 tendrá su centro en el punto de coordenadas $(-7; 3)$ y radio $\frac{5}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)

Elegí la única opción que muestra la ecuación de la hipérbola con focos $F_1 = (5, 3)$ y $F_2 = (-1, 3)$ y vértice en $A = (0, 3)$.

A)

$$\frac{(y - 3)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{5} = 1$$

C)

$$\frac{x^2}{100} - \frac{(y + 3)^2}{81} = 1$$

B)

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + (y - 3)^2 = 1$$

D)

$$5(x - 2)^2 - 4(y - 3)^2 = 20$$

Opción correcta: D)

Resolución

De los datos surge que la distancia focal $2c = 6$ y el punto $A = (0, 3)$ es vértice de la hipérbola. El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$: $C = (2, 3)$. La distancia entre el vértice A y el centro C nos da el valor de $a = 2$. Teniendo en cuenta que para la hipérbola se cumple $c^2 = a^2 + b^2$ aquí resulta $3^2 = 2^2 + b^2$, y por lo tanto $b^2 = 5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)

El vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tiene norma 6 y es paralelo al vector $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$.

Elegí la única opción que muestra las posibles coordenadas del vector \vec{v} .

A) $(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, -\frac{12}{5})$

B) $(-\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5}, -\frac{2\sqrt{6}}{5})$

C) $(-2, 4, -4)$

D) $(2, 4, 4)$

Opción correcta: C)

Resolución

Como \vec{v} es paralelo a $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$ entonces es posible escribir a $\vec{v} = (-\frac{1}{5}k, \frac{2}{5}k, -\frac{2}{5}k)$ con $k \in \mathbb{R}$. Además, debe cumplir que $\|\vec{v}\| = 6$. Luego, podemos plantear la ecuación:

$\sqrt{(-\frac{1}{5}k)^2 + (-\frac{2}{5}k)^2 + (\frac{2}{5}k)^2} = 6$. De esta última ecuación se pueden obtener los valores de k para elegir las posibles coordenadas de \vec{v} . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)

Considerá los vectores $\vec{v} = (4, 2, -3)$, $\vec{u} = (-8, a, b)$ y $\vec{w} = (-7, -\frac{1}{4}, a)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Elegí la única opción que muestra los valores de $b, a \in \mathbb{R}$ para que \vec{v} sea ortogonal a \vec{u} y a \vec{w} .

A) $b = -17, a = -\frac{19}{2}$

C) $b = 17, a = -\frac{19}{2}$

B) $b = 0, a = -\frac{19}{2}$

D) $b = 6, a = -4$

Opción correcta: A)

Resolución

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es nulo. Por ende, de las ecuaciones $(4, 2, -3) \cdot (-8, a, b) = 0$ y $(4, 2, -3) \cdot (-7, -\frac{1}{4}, a) = 0$ se pueden determinar b y a .

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)

Indicá la opción que muestra el simétrico del punto $P = (17, -9, 2)$ respecto a la recta de ecuación $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(1, 1, -1) + (8, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- A) $(7, 0, 1)$ B) $(-7, 0, 1)$ C) $(3, -9, 0)$ D) $(-3, 9, 0)$

Opción correcta: D)

Resolución

Para hallar el simétrico de P podemos construir un plano ortogonal a la recta que pase por P , obteniendo: $x+y-z=6$. La intersección del plano con la recta es un punto R que será el punto medio entre P y su simétrico. Las coordenadas de R son $(7, 0, 1)$, luego usando lo anterior, $R = \frac{P+Q}{2}$, de donde se despeja las coordenadas del punto Q , el simétrico de P respecto a la recta L . Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)

Considerá el plano Π de ecuación $2x - y = 8$. Indicá la única opción que muestra la ecuación de la recta que L perpendicular a Π y que contiene al punto $P = (1, -9, 7)$.

- A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = -17, z = 7\}$
B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 8, 2x - y + 7z = 0\}$
C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2, -1, 0)\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$
D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2, -1, 1)\beta + (1, -9, 7); \beta \in \mathbb{R}\}$

Opción correcta: A)

Resolución

La recta perpendicular al plano tiene como vector director a $(2, -1, 0)$ entonces como las rectas de la segunda y cuarta opción no cumplen esto, podemos descartarlas. Además, el punto P debe pertenecer a la recta buscada por lo que de las opciones restantes, nos quedamos con la primera. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.
