UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Primer parcial - 20/09/2023 - Tema 6

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)
  El vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tiene norma 6 y es paralelo al vector $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.
  Elegí la única opción que muestra las posibles coordenadas del vector $\vec{v}$.

  A) $\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, -\frac{12}{5}\right)$ B) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5}, -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$ C) $(-2, 4, -4)$ D) $(2, 4, 4)$

  Opción correcta: C)

  Resolución
  Como $\vec{v}$ es paralelo a $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ entonces es posible escribir a $\vec{v} = \left(-\frac{1}{5}k, \frac{2}{5}k, -\frac{2}{5}k\right)$ con $k \in \mathbb{R}$. Además, debe cumplir que $||\vec{v}|| = 6$. Luego, podemos plantear la ecuación:
  $\sqrt{\left(-\frac{1}{5}k\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}k\right)^2 + \left(\frac{2}{5}k\right)^2} = 6$. De esta última ecuación se pueden obtener los valores de k para elegir las posibles coordenadas de $\vec{v}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)
  Considerá los vectores $\vec{v} = (4, 2, -3)$, $\vec{u} = (-8, a, b)$ y $\vec{w} = \left(-7, -\frac{1}{4}, a\right)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
  Elegí la única opción que muestra los valores de $b, a \in \mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{w}$.

  A) $b = -17$, $a = -\frac{19}{2}$
  C) $b = 17$, $a = -\frac{19}{2}$
  B) $b = 0$, $a = -\frac{19}{2}$
  D) $b = 6$, $a = -4$

  Opción correcta: A)

  Resolución
  Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es nulo. Por ende, de las ecuaciones $(4, 2, -3) \cdot (-8, a, b) = 0$ y $(4, 2, -3) \cdot \left(-7, -\frac{1}{4}, a\right) = 0$ se pueden determinar b y a.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)
  Indicá la opción que muestra el simétrico del punto $P = (17, -9, 2)$ respecto a la recta de ecuación $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \lambda(1, 1, -1) + (8, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

  A) $(7, 0, 1)$ B) $(-7, 0, 1)$ C) $(3, -9, 0)$ D) $(-3, 9, 0)$

  Opción correcta: D)

  Resolución
  Para hallar el simétrico de P podemos construir un plano ortogonal a la recta que pase por P, obteniendo: x+y-z=6. La intersección del plano con la recta es un punto R que será el punto medio entre P y su simétrico. Las coordenadas de R son $(7, 0, 1)$, luego usando lo anterior, $R = \frac{P+Q}{2}$, de donde se despeja las coordenadas del punto Q, el simétrico de P respecto a la recta L. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)
  Considerá el plano Π de ecuación $2x - y = 8$. Indicá la única opción que muestra la ecuación de la recta que L perpendicular a Π y que contiene al punto $P = (1, -9, 7)$.

  A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = -17, z = 7\}$
  B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 8, 2x - y + 7z = 0\}$
  C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2, -1, 0)\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$
  D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2, -1, 1)\beta + (1, -9, 7); \beta \in \mathbb{R}\}$

  Opción correcta: A)

Resolución
La recta perpendicular al plano tiene como vector director a $(2, -1, 0)$ entonces como las rectas de la segunda y cuarta opción no cumplen esto, podemos descartarlas. Además, el punto P debe pertenecer a la recta buscada por lo que de las opciones restantes, nos quedamos con la primera. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)

Dado el conjunto $\{(1, 2, 3, 1, 1), (\alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma, 3, 2), (1, 2, 3, 2, 1)\}$.
Elegí la terna de valores α, β, γ para que este conjunto sea linealmente dependiente.

A) $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = -4$

B) $\alpha = 2, \beta = 2, \gamma = 4$

C) $\alpha = -2, \beta = -2, \gamma = 4$

D) $\alpha = -2, \beta = 2, \gamma = 4$

Opción correcta: D)

Resolución
Para que este conjunto genere un subespacio de dimensión 2 debe ocurrir que el conjunto sea linealmente dependiente. Si planteamos la combinación lineal $(1, 2, 3, 1, 1) + (1, 2, 3, 2, 1) = (2, 4, 6, 3, 2)$ podemos concluir que $(2, 4, 6, 3, 2) = (\alpha + \gamma, \alpha + \beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma, 3, 2)$ de donde obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 4 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 6 \end{cases}$$

La única terna que es solución del sistema es $\alpha = -2, \beta = 2, \gamma = 4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)

Elegí la opción que ofrece el valor de k para que el vector $(-5, 1, k)$ sea combinación lineal de $(1, 1, -1)$ y $(2, -1, 1)$.

A) $k = 1$

B) $k = -1$

C) $k = -3$

D) $k = 3$

Opción correcta: B)

Resolución
Para que $(-5, 1, k)$ sea combinación lineal de $(1, 1, -1)$ y $(2, -1, 1)$ debe ocurrir que
$\alpha(1, 1, -1) + \beta(2, -1, 1) = (-5, 1, k)$, de las dos primeras coordenadas tenemos que:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -5 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

resolviendo este sistema tenemos que $\alpha = -1$ $\beta = -2$. Entonces con esto y la tercer coordenada tenemos que $(-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = k$ o sea que $k = -1$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)

Considerá las circunferencias de ecuación: $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 14x - 6y + 53 = 0\}$ y $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 5x + 2y + 1 = 0\}$. Elegí la única opción que muestra la ecuación de la circunferencia C_3 que tiene el mismo centro que C_1 y el mismo radio que C_2.

A)
$$(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4}$$

B)
$$(x + 7)^2 + (y + 3)^2 = 6{,}25$$

C)
$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{5}$$

D)
$$(x - 2{,}5)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

Opción correcta: A)

Resolución
Completando cuadrados obtenemos las expresiones canónicas $C_1 : (x+7)^2 + (y-3)^2 = 5$ y $C_2 : (x-2{,}5)^2 + (y+1)^2 = 6{,}25$, podemos decir entonces que C_3 tendrá su centro en el punto de coordenadas $(-7;3)$ y radio $\frac{5}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
 Elegí la única opción que muestra la ecuación de la hipérbola con focos $F_1 = (5,3)$ y $F_2 = (-1,3)$ y vértice en $A = (0,3)$.

A)
$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1$$

B)
$$\frac{(x-2)^2}{4} + (y-3)^2 = 1$$

C)
$$\frac{x^2}{100} - \frac{(y+3)^2}{81} = 1$$

D)
$$5(x-2)^2 - 4(y-3)^2 = 20$$

Opción correcta: D)

Resolución
De los datos surge que la distancia focal $2c = 6$ y el punto $A = (0,3)$ es vértice de la hipérbola. El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$: $C = (2,3)$. La distancia entre el vértice A y el centro C nos da el valor de $a = 2$. Teniendo en cuenta que para la hipérbola se cumple $c^2 = a^2 + b^2$ aquí resulta $3^2 = 2^2 + b^2$, y por lo tanto $b^2 = 5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.
