UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Primer parcial - 20/09/2023 - Tema 5

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)
  El vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tiene norma 6 y es paralelo al vector $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.
  Elegí la única opción que muestra las posibles coordenadas del vector $\vec{v}$.

  A) $\left(-\frac{12}{5}, \frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ B) $(-4, 4, -2)$ C) $(4, 4, 2)$ D) $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5}, -\frac{\sqrt{6}}{5}\right)$

  Opción correcta: B)

  Resolución
  Como $\vec{v}$ es paralelo a $\left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ entonces es posible escribir a $\vec{v} = \left(-\frac{2}{5}k, \frac{2}{5}k, -\frac{1}{5}k\right)$ con $k \in \mathbb{R}$. Además, debe cumplir que $||\vec{v}|| = 6$. Luego, podemos plantear la ecuación:
  $\sqrt{\left(-\frac{2}{5}k\right)^2 + \left(\frac{2}{5}k\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}k\right)^2} = 6$. De esta última ecuación se pueden obtener los valores de k para elegir las posibles coordenadas de $\vec{v}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)
  Considerá los vectores $\vec{v} = (2, -3, 4)$, $\vec{u} = (a, b, -8)$ y $\vec{w} = \left(-\frac{1}{4}, a, -7\right)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.
  Elegí la única opción que muestra los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que $\vec{v}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{w}$.

  A) $a = -\frac{19}{2}$, $b = 0$
  B) $a = -\frac{19}{2}$, $b = 17$
  C) $a = -\frac{19}{2}$, $b = -17$
  D) $a = -4$, $b = 6$

  Opción correcta: C)

  Resolución
  Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es nulo. Por ende, de las ecuaciones $(2, -3, 4) \cdot (a, b, -8) = 0$ y $(2, -3, 4) \cdot \left(-\frac{1}{4}, a, -7\right) = 0$ se pueden determinar a y b.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)
  Indicá la opción que muestra el simétrico del punto $P = (17, -9, 3)$ respecto a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, 1, -1) + (0, 1, 8), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

  A) $(-9, 19, 5)$ B) $(4, 5, 4)$ C) $(21, -4, 7)$ D) $(9, -19, -5)$

  Opción correcta: A)

  Resolución
  Para hallar el simétrico de P podemos construir un plano ortogonal a la recta que pase por P, obteniendo: x+y-z=5. La intersección del plano con la recta es un punto R que será el punto medio entre P y su simétrico. Las coordenadas de R son $(4, 5, 4)$, luego usando lo anterior, $R = \frac{P+Q}{2}$, de donde se despeja las coordenadas del punto Q, el simétrico de P respecto a la recta L. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)
  Considerá el plano Π de ecuación $-y + z = 1$. Indicá la única opción que muestra la ecuación de la recta que L perpendicular a Π y que contiene al punto $P = (1, -9, 7)$

  A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -y + z = 1, 2x - y + 7z = 0\}$
  B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1; z + y = -2\}$
  C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \beta(0, -1, 1), \beta \in \mathbb{R}\}$
  D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \beta(1, -1, 1) + (1, -9, 7); \beta \in \mathbb{R}\}$

  Opción correcta: B)

Resolución
La recta perpendicular al plano tiene como vector director a $(0,-1,1)$ entonces como las rectas de la primera y cuarta opción no cumplen esto, podemos descartarlas. Además, el punto P debe pertenecer a la recta buscada por lo que de las opciones restantes, nos quedamos con la segunda. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
El conjunto $\{(1,2,3,1,1),(\alpha+\beta+\gamma,2\alpha-\beta+\gamma,\alpha-2\beta-\gamma,3,2),(1,0,1,2,1)\}$ es linealmente dependiente. Elegí la terna de valores α,β,γ para que esta afirmación sea verdadera.

A) $\alpha=4,\beta=2,\gamma=4$

B) $\alpha=-4,\beta=-2,\gamma=-4$

C) $\alpha=4,\beta=2,\gamma=-4$

D) $\alpha=4,\beta=-2,\gamma=-4$

Opción correcta: C)

Resolución
Si planteamos la combinación lineal $(1,2,3,1,1)+(1,0,1,2,1)=(2,2,4,3,2)$ podemos concluir que $(2,2,4,3,2)=(\alpha+\beta+\gamma,2\alpha-\beta+\gamma,\alpha-2\beta-\gamma,3,2)$ de donde obtenemos el sistema:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2\\2\alpha-\beta+\gamma=2\\\alpha-2\beta-\gamma=4\end{cases}$$

cuya solución es $\alpha=4$, $\beta=2$ y $\gamma=-4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
Considerá el subespacio $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_3=0\}$. Elegí la única afirmación verdadera.

A) El vector $(-1,2,-1,-1)$ pertenece a S.

B) El conjunto $\{(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ es una base de S.

C) El conjunto $\{(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,1,1,0)\}$ es un sistema de generadores de S.

D) La dimensión de S es 4.

Opción correcta: B)

Resolución
El ítem A) se descarta comprobando que $x_1+x_3=-1-1=-2\neq 0$. Mientras que en C) vemos que $(1;1;1;0)$ no pertenece a S. A partir de $x_1+x_3=0$ tenemos que $x_3=-x_1$ con las otras tres variables libres, entonces todos los puntos son de la forma
$(x_1,x_2,-x_1,x_4)=x_1(1,0,-1,0)+x_2(0,1,0,0)+x_4(0,0,0,1)$ con lo cual el conjunto
$(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)$ es una base de S. Como la base tiene tres elementos la dimensión de S es 3. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)
Considerá las circunferencias de ecuación: $C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2+5x-2y+1=0\}$ y $C_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-6x-10y+27=0\}$. Elegí la única opción que muestra la ecuación de la circunferencia C_3 que tiene el mismo centro que C_1 y el mismo radio que C_2.

A)
$$(x-3)^2+(y-5)^2=\frac{25}{4}$$

B)
$$(x+2{,}5)^2+(y-1)^2=7$$

C)
$$(x+5)^2+(y-1)^2=\sqrt{7}$$

D)
$$(x-2{,}5)^2+(y+1)^2=7$$

Opción correcta: B)

Resolución
Completando cuadrados obtenemos las expresiones canónicas $C_1 : (x+2,5)^2 + (y-1)^2 = 6,25$ y $C_2 : (x-3)^2 + (y-5)^2 = 7$, podemos decir entonces que C_3 tendrá su centro en el punto de coordenadas $(-2,5;1)$ y radio $\sqrt{7}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
Elegí la única opción que muestra la ecuación de la hipérbola con focos $F_1 = (5,3)$ y $F_2 = (5,-5)$ y vértice en $A = (5,0)$.

A)
$$(y+1)^2 - \frac{(x-5)^2}{15} = 1$$

B)
$$\frac{(x-5)^2}{15} + (y-1)^2 = 1$$

C)
$$\frac{(x+5)^2}{100} - y^2 = 1$$

D)
$$(y+1)^2 - \frac{(x-5)^2}{7} = 1$$

Opción correcta: A)

Resolución
De los datos surge que la distancia focal $2c = 8$ y el punto $A = (5,0)$ es el vértice de la hipérbola. El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$: $C = (5,-1)$. La distancia entre el vértice A y el centro C nos da el valor de $a = 1$. Teniendo en cuenta que para la hipérbola se cumple $c^2 = a^2 + b^2$ aquí resulta $4^2 = 1^2 + b^2$, y por lo tanto $b^2 = 15$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.
