UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Primer parcial - 20/09/2023 - Tema 3

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

Sabiendo que $\{(1,2,3),(-1,-6,-5),(1,0,2)\}$ es linealmente dependiente, elegí la terna de valores que corresponde a los coeficientes de la combinación lineal igual al vector nulo.

A) $\lambda = 3, \mu = -2, \nu = -1$

B) $\lambda = -3, \mu = -2, \nu = -1$

C) $\lambda = -3, \mu = 2, \nu = -1$

D) $\lambda = -3, \mu = -2, \nu = 1$

Opción correcta: C)

Resolución

A partir de plantear la combinación lineal $\lambda \cdot (1,2,3) + \nu \cdot (-1,-6,-5) + \mu \cdot (1,0,2) = (0,0,0)$ obtenemos el sistema homogéneo:

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu = 0 \\ 2\lambda - 6\nu = 0 \\ 3\lambda + 2\mu - 5\nu = 0 \end{cases}$$

el cual tiene como solución no trivial que $\lambda = 3\nu$ y $\mu = -2\nu$, con ν pudiendo tomar cualquier valor con lo cual dándoles valores a este último tenemos que la única terna que es solución del sistema es $\nu = -1, \lambda = -3, \mu = 2$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Considerá el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_2 + x_3 = 0 \wedge x_5 = 0\}$. Elegí la terna de valores que hace que el vector $(\alpha, \beta, \gamma, \gamma, 0)$ pertenezca a S.

A) $\alpha = -1, \beta = 3, \gamma = 2$

B) $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 2$

C) $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = -2$

D) $\alpha = -1, \beta = -3, \gamma = 2$

Opción correcta: B)

Resolución

De las ecuaciones que definen S, podemos notar que basta con que $\beta = \alpha + \gamma$ para que el vector pertenezca a S. La única terna que cumple esta condición es la B). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

Indicá cuál de las siguientes expresiones describe el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos $F_1 = (1,1)$ y $F_2 = (1,-7)$ es igual a 18.

A)
$$\frac{(x+1)^2}{81} + \frac{(y-3)^2}{65} = 1$$

B)
$$\frac{(x-1)^2}{81} + \frac{(y+3)^2}{65} = 1$$

C)
$$\frac{(x-1)^2}{65} - \frac{(y+3)^2}{81} = 1$$

D)
$$\frac{(x-1)^2}{65} + \frac{(y+3)^2}{81} = 1$$

Opción correcta: D)

Resolución

El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante , es una elipse. En la elipse aquí considerada la suma de las distancias de cada punto a los focos es $2a = 18$ y la distancia entre los focos es $2c = 8$. Teniendo en cuenta la relación trigonométrica entre los parámetros que definen una elipse: $a^2 = b^2 + c^2$, debe cumplirse que $81 = b^2 + 16$ entonces $b^2 = 65$. El centro de la elipse es el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ de coordenadas $C = (1,-3)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)
Una parábola tiene ecuación general $y^2 - 2x + \alpha y + \beta = 0$ y su vértice es $V = (-10; 6)$.
Elegí la única opción que muestra las coordenadas de su foco.

A) $F = (-10,5; 6)$ B) $F = (-9,5; 6)$ C) $F = (-10; 6,5)$ D) $F = (-10; 5)$

Opción correcta: B)

Resolución
Conociendo las coordenadas del vértice podemos escribir la parábola en su forma canónica $(y-6)^2 = 2p(x+10)$. Del desarrollo de esta expresión resulta $y^2 - 12y + 36 = 2px + 20p$, que ordenada convenientemente será $y^2 - 2px - 12y + 36 - 20p = 0$ y podemos comparar términos semejantes con la expresión $y^2 - 2x + \alpha y + \beta = 0$ para así determinar que $p = 1$. También es posible determinar$\alpha = -12$ y $\beta = 16$, aunque estos valores no son necesarios para responder lo pedido. Las coordenadas del Foco se obtienen a partir de $F = \left(-10 + \frac{p}{2}; 6\right)$, obteniendo $F = (-9,5; 6)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
Considerá los vectores $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ y $\vec{w} = (2, -2, -5)$. Si el punto medio entre los vectores es $(2, -3, -2)$, elegí la opción que muestra la norma del vector $\vec{v}$.

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{181}$ C) $\sqrt{14}$ D) $\sqrt{21}$

Opción correcta: D)

Resolución
Si $(2, -3, -2)$ es el punto medio entre los vectores, se pueden calcular las coordenadas de $\vec{v}$ planteando que: $\frac{v_x+2}{2} = 2$, $\frac{v_y-2}{2} = -3$, $\frac{v_z-5}{2} = -2$. De estas ecuaciones se obtiene que $\vec{v} = (2, -4, 1)$ y que su norma es $\sqrt{21}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
Considerá los puntos $(2, 2, 5)$ y $(-k, k, 9), k \in \mathbb{R}$. Elegí la opción que muestra todos los valores de k de manera tal que la distancia entre los puntos sea 16.

A) $|k| \neq 2\sqrt{29}$ B) $|k| = 2\sqrt{29}$ C) $|k| < 2\sqrt{29}$ D) $|k| \leq 2\sqrt{29}$

Opción correcta: B)

Resolución
Si planteás la fórmula de distancia entre dos puntos, obtendrás la ecuación
$(2+k)^2 + (2-k)^2 + (5-9)^2 = 16^2$, de donde se deduce que $|k| = 2\sqrt{29}$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)
Considerá los puntos de $\mathbb{R}^3$: $(-1, 5, 2)$, $(15, 11, -9)$ y $(1, 19, 10)$. Indicá la única opción que muestra una afirmación verdadera.

A) Con estos tres puntos no se puede construir un plano.
B) La ecuación implícita del plano que contiene a los tres puntos es: $202x - 150y + 212z = -528$.
C) La ecuación implícita del plano que contiene a los tres puntos es: $202x + 150y + 212z = 5172$.
D) El plano que contiene a los 3 puntos tiene ecuación: $\overline{X} = \alpha(15, 11, -9) + \beta(-1, 5, 2) + (1, 19, 10)$

Opción correcta: B)

Resolución
A partir de los tres puntos dato, podemos obtener dos direcciones del plano, como resultado de hacer, por ejemplo: $\vec{v_1} = (15, 11, -9) - (-1, 5, 2)$ y $\vec{v_2} = (1, 19, 10) - (-1, 5, 2)$. En consecuencia, un vector normal a estas direcciones se obtiene realizando el producto vectorial $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = (202, -150, 212)$. Luego, usando uno de los tres puntos y este vector normal hallado, se puede obtener la ecuación del plano: $202x - 150y + 212z = -528$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
  Elegí la opción que muestra la intersección del plano de ecuación $x + y = 20$ y la recta de ecuación $L = \{X : (1, 3, -8) + (1, -1, -2)\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

  A) $\{(9, 11, -24)\}$ B) $\{(9, 11, 24)\}$ C) $\{(-26, -25, 46)\}$ D) $\emptyset$

  Opción correcta: D)

  Resolución
  Usamos que los puntos de la recta L son de la forma: $(1 + \lambda, 3 - \lambda, -8 - 2\lambda)$. Luego, como queremos buscar si alguno de ellos también es punto del plano, veamos si alguno de estos puntos cumple que: $1 + \lambda + 3 - \lambda = 20$. Como esta ecuación no tiene solución, concluimos que la intersección de recta y plano es el conjunto vacío. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.
