UBAXXI - Álgebra A - Resolución del Primer parcial - 20/09/2023 - Tema 11

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

Considerá el subspacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.
Elegí la opción que muestra la cantidad de vectores de una base de S.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Opción correcta: C)

Resolución
A partir de la ecuación $2x_2 + x_3 + x_4 = 0$ tenemos por ejemplo que $x_4 = -2x_2 - x_3$ con lo cuál tenemos tres variables indeterminadas, de modo que los vectores de S son de la forma $(x_1, x_2, x_3, -2x_2 - x_3) = x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, -2) + x_3(0, 0, 1, -1)$, con lo cual S tiene tres vectores en su base. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Considerá los vectores $\vec{v} = (1, 2, -3)$ y $\vec{w} = (-3, 1, -2)$.
Elegí la opción que muestra una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

A) $(0, -7, -11)$ B) $(0, 7, 11)$ C) $(-6, -5, 7)$ D) $(6, 5, 7)$

Opción correcta: C)

Resolución
Para obtener la combinación correcta escribimos $-3(1, 2, -3) + (-3, 1, -2) = (-6, -5, 7)$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

Elegí la única opción que muestra el valor de la excentricidad de la elipse de ecuación

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 16y^2 - 8x - 96y + 84 = 0\}$$

A) $e = 0,75$ B) $e = \frac{2}{\sqrt{3}}$ C) $e = \frac{\sqrt{12}}{4}$ D) $e = 1,73$

Opción correcta: C)

Resolución
Completando cuadrados obtenemos la expresión canónica $C : \left\{\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1\right\}$, de donde surge que $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$por lo que $c^2 = 12$. Por consiguiente $e = \frac{\sqrt{12}}{4}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)
Las asíntotas de cierta hipérbola se cortan en el punto de coordenadas $C = (3, -1)$, se sabe además que uno de sus vértices es $V = (1, -1)$, y que la medida del eje focal es 6. Elegí la única opción que muestra la ecuación de esta hipérbola .

A)
$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

B)
$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} = 1$$

C)
$$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

D)
$$\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$$

Opción correcta: B)

Resolución
Las asíntotas de una hipérbola se cortan en el centro , por lo tanto $C = (3; -1)$ es centro de esta cónica. La distancia entre el vértice V y el centro C nos da el valor de $a = 2$. Teniendo en cuenta que para la hipérbola se cumple $c^2 = a^2 + b^2$ aquí resulta $3^2 = 2^2 + b^2$, y por lo tanto $b^2 = 5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
Considerá los vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tales que se verifican las siguientes condiciones: $\vec{v} \cdot \vec{w} = -1$, la norma de $\vec{v}$ es $\frac{3}{4}$ y $\vec{w} = \left(-\frac{5}{9}, 0, \frac{4}{3}\right)$. Elegí la única opción que muestra el valor de $\cos(\alpha)$ si α es el ángulo determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

A) $\frac{12}{13}$ B) $157,38$ C) $-\frac{12}{13}$ D) $\frac{157}{180}$

Opción correcta: C)

Resolución
La fórmula para hallar el ángulo entre dos vectores: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||}$. Si se reemplazan los datos del problema en esta igualdad, resulta: $\cos(\alpha) = \frac{-1}{\frac{13}{9} \cdot \frac{3}{4}}$de donde se deduce la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
Si al vector $(2, -1, 0)$ se le aplica una dilatación de escalar β y luego una traslación de vector $\vec{u}$ se obtiene el vector $(-5, 3, -1)$. Si al vector $(-3, 0, 1)$ se le aplica una dilatación de escalar β y luego una traslación de vector $\vec{u}$ se obtiene el vector $(5, 1, -3)$. Elegí la única opción que indica el valor del escalar β y las coordenadas del vector $\vec{u}$.

A) $\beta = 2$, $\vec{u} = (-1, -1, -1)$
B) $\beta = -2$, $\vec{u} = (-1, 1, -1)$
C) $\beta = -2$, $\vec{u} = (-1, -1, -1)$
D) $\beta = -2$, $\vec{u} = (1, -1, 1)$

Opción correcta: B)

Resolución
Con los datos del enunciado del problema, se pueden plantear dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \beta(2, -1, 0) + (u_x, u_y, u_z) = (-5, 3, -1) \\ \beta(-3, 0, 1) + (u_x, u_y, u_z) = (5, 1, -3) \end{cases}$$

De este sistema se obtiene el valor del escalar β y las coordenadas del vector $\vec{u}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)
 Indicá la única opción que muestra la distancia entre el plano de ecuación $-4x + 7y - 4z = 1$ y el punto $P = (1, 1, 1)$.

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $-\frac{2}{9}$

Opción correcta:C)

Resolución
Para hallar la distancia de un punto a un plano, se puede proceder hallando la distancia entre el punto P y Q, la proyección de P en el plano. El punto Q se obtiene calculando la intersección del plano con la recta perpendicular a este, que pasa por P. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
 Considerá el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 5y + z = 0\}$ y el punto $P = (k, k + 8, k^2)$ donde $k \in \mathbb{R}$. Indicá la opción que muestra todos los valores de k para los cuales $P \in \Pi$.

A) $k = 8$ B) $k = -8$ C) $k = -5$ y $k = 8$ D) $k = 5$ y $k = -8$

Opción correcta: C)

Resolución
El punto P pertenece al plano Π si cumple su ecuación. Reemplazando las coordenadas de P en la ecuación del plano obtenemos la ecuación $2k-5(k+8)+k^2 = 0$ o equivalentemente: $k^2-3k-40 = 0$ condición que se cumple para $k = 8$ y también para $k = -5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.
