

- Ejercicio 1 (1,25 puntos)

Considerá $z \in \mathbb{C}$. Indicá la única opción que contiene una de las soluciones de la ecuación

$$z - 13i = 30z^{-1}$$

A) 0

C) $-10i$

Respuesta: D)

B) $1 + 13i$

D) $3i$

Resolución

A la ecuación $z - 13i = 30z^{-1}$ la podemos reescribir como $z^2 - 13iz = 30$, o bien, $z^2 - 13iz - 30 = 0$. Usando ahora la fórmula resolvente nos queda que: $\frac{13i \pm \sqrt{-49}}{2} = \frac{13i \pm 7i}{2}$, de donde podemos leer que las soluciones son $10i$ y $3i$. Luego, buscando entre las opciones, la única correcta es la D).

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1,25 puntos)

Considerá

$$z = 3i^6(3 - 3i)^2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Indicá la única opción que muestra la forma polar de z

A) $54[\cos(\pi) + i \sin(\pi)]$

C) $-54[\cos(0) + i \sin(0)]$

B) $54[\cos(0) + i \sin(0)]$

D) $3\sqrt{18} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$

Respuesta: A)

Resolución

Resolviendo las operaciones indicadas, recordando que $i^2 = -1$ nos queda: $z = 3i^6(3 - 3i)^2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = -3(-18i)(i) = 54i^2 = -54$. Por lo que la forma polar de z es $54[\cos(\pi) + i \sin(\pi)]$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1,25 puntos)

Considerá el polinomio $P(x) = x^6 + 6x^4 - 15x^2 - 100$ del cual se sabe que $\sqrt{5}i$ es raíz múltiple. Indica la única opción que muestra una expresión de $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

A) $P(x) = (x^2 + 5) \cdot (x^4 + x^2 - 20)$

B) $P(x) = (x^4 + 25) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

C) $P(x) = (x^2 + 5)^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

D) $P(x) = (x^2 + 5)^2 \cdot (x^2 - 4)$

Respuesta: C)

Resolución

En primer lugar debemos tener en cuenta que si $\sqrt{5}i$ es raíz de $P(x)$ también lo es $-\sqrt{5}i$, en segundo lugar ambas deben tener el mismo grado de multiplicidad. $P(x)$ resulta entonces divisible por $(x - \sqrt{5}i)^2 \cdot (x + \sqrt{5}i)^2$. Luego dividimos a $P(x)$ por $(x^4 + 10x^2 + 25)$ obteniendo el polinomio cociente $(x^2 - 4)$ el cual puede expresarse como $(x - 2) \cdot (x + 2)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1,25 puntos)

Considerá la ecuación

$$x^3(x+1) = 9(x+1) + 8x^2$$

Indicá cuál es la única opción que muestra todos los resultados de dicha ecuación en $\mathbb{C}$.

- A) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
B) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}; -3; 3$
C) $-3; 3$
D) $0; -1; \frac{-9+3\sqrt{23}i}{16}; \frac{-9-3\sqrt{23}i}{16}$

Respuesta: B)

Resolución

Aplicando propiedad distributiva, e igualando a 0 se obtiene la ecuación equivalente $x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9 = 0$. Por el Lema de Gauss deducimos que 3 y -3 son raíces de esta ecuación, por lo tanto $x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$ es divisible por $x - 3$ y $x + 3$. Podemos llegar entonces a que $x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + x + 1)$. Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + x + 1 = 0$ son $x = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ y $x = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1,25 puntos)

Considerá la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & k & -k \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$

Elegí la única opción que indica el/los valores de k para el/los cual/es la matriz admite inversa.

- A) $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ C) Para todo número real k .
B) Para ningún número real k . D) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

Respuesta: A)

Resolución

Si se calcula el determinante de la matriz M , se obtiene la expresión $2k - k^3$. Esa expresión debe ser distinta de cero para que la matriz admita inversa y eso sucede solo para los reales distintos de $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 6 (1,25 puntos)

Considerá las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y

$D = A^{-1} - B^t \cdot C$ Indicá la única opción que muestra el valor del coeficiente d_{12} de la matriz D .

- A) $-\frac{11}{2}$ C) 11 Respuesta: D)
B) 32 D) $\frac{133}{4}$

Resolución

Hallando primero la matriz traspuesta de B y la inversa de A podemos realizar las operaciones indicadas y continuar hallando todos los coeficientes de D . Resulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ y } B^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego se calcula $D = A^{-1} - B^t \cdot C$ y se obtiene que $d_{12} = \frac{133}{4}$.

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 7 (1,25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (-x_1 + 4x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3; -2x_1 + 3x_2)$$

Elegí la opción que muestra la dimensión de la imagen de T .

A) 0

C) 2

Respuesta: C)

B) 1

D) 3

Resolución

Igualando el vector imagen al vector nulo tenemos $(-x_1 + 4x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3; -2x_1 + 3x_2) = (0, 0, 0)$ de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que el núcleo de T está generado por $(-3; -2; 5)$. Por lo tanto la dimensión del núcleo es uno. Por el Teorema de la dimensión sabemos que $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = 3$, con lo cual la dimensión de la imagen será dos. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 8 (1,25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - 3x_2 + x_3; x_1 + x_2; -x_1 + 3x_2 - 2x_3).$$

Si C representa el cubo unitario, elegí la opción que muestra el volumen de la imagen de C por T .

A) 8

C) -4

Respuesta: B)

B) 4

D) -8

Resolución

Armamos la matriz asociada a T que es $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Calculando el determinante de esta matriz tenemos que es -4. Y como Volumen de $T(C) = (\text{Volumen de } C) |\det(A_T)|$ tenemos la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.
