UBAXXI - Álgebra A - Recuperatorio del 2do. Parcial - 21/06/2023 - Tema 3: resolución

---

- Ejercicio 1 (1,25 puntos)
  Considerá $z \in \mathbb{C}$. Indicá la única opción que contiene una de las soluciones de la ecuación

$$3z \cdot (z + 5z^{-1}) = 6z$$

A) $-1+2i$ C) $1-2i$ Respuesta: C)

B) $1+i$ D) 0

Resolución
Desarrollando la ecuación $3z \cdot (z + 5z^{-1}) = 6z$ podemos reescribirla como $3z^2 + 15 = 6z$, o bien, $3z^2 - 6z + 15 = 0$. Usando ahora la fórmula resolvente nos queda que las dos soluciones de la ecuación son: $\frac{6 \pm \sqrt{-144}}{6} = \frac{6 \pm 12i}{6} = 1 \pm 2i$. Luego, la única opción correcta es la C). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 2 (1,25 puntos)
  Considerá

$$z = (2i)^5 (3-3i)^2 \cdot [\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$$

Indicá la única opción que muestra la forma polar de z

A) $576[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$

B) $576[\cos(0) + i\sin(0)]$

C) $288[\cos(0) + i\sin(0)]$

D) $576\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

Respuesta: A)

Resolución
Resolviendo las operaciones indicadas, recordando que $i^2 = -1$ nos queda:
$z = (2i)^5(3-3i)^2 \cdot [\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = 32i(-18i)(-1) = 576i^2 = -576$.
Por lo que la forma polar de z es $576[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 3 (1,25 puntos)
  Considerá el polinomio $P(x) = x^6 + 2x^4 - 15x^2 - 36$, del cual se sabe que $\sqrt{3}i$ es raíz múltiple. Indica la única opción que muestra una expresión de $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

A) $P(x) = (x^2+3) \cdot (x^4 - x^2 - 12)$

B) $P(x) = (x^2+3)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2)$

C) $P(x) = (x^4+9) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$

D) $P(x) = (x^2+3)^2 \cdot (x^2-4)$

Respuesta: B)

Resolución
En primer lugar debemos tener en cuenta que si $\sqrt{3}i$ es raíz de $P(x)$ también lo es $-\sqrt{3}i$, en segundo lugar ambas deben tener el mismo grado de multiplicidad porque P tiene sus coeficientes reales. $P(x)$ resulta entonces divisible por $(x-\sqrt{3}i)^2 \cdot (x+\sqrt{3}i)^2$. Luego dividimos a $P(x)$ por (x^4+6x^2+9) obteniendo el polinomio cociente (x^2-4) el cual puede expresarse como $(x-2)\cdot(x+2)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 4 (1,25 puntos)

Considerá la ecuación $x^4 + 2x \cdot (x^2 + x) = 2x + 3$

Indicá cuál es la única opción que muestra todos los resultados de dicha ecuación en $\mathbb{C}$.

A) $-1 + \sqrt{2}i; -1 - \sqrt{2}i$

B) $-1; 1$

C) $-1 + \sqrt{2}i; -1 - \sqrt{2}i; -1; 1$

D) $0; -1; -1 + i; -1 - i$

Respuesta: C)

Resolución

Aplicando propiedad distributiva, e igualando a 0 se obtiene la ecuación equivalente $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$. Por el Lema de Gauss deducimos que 1 y -1 son raíces de esta ecuación, por lo tanto $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$ es divisible por $x - 1$ y $x + 1$. Podemos llegar entonces a que $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 3)$. Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 3 = 0$ son $x = -1 + \sqrt{2}i$ y $x = -1 - \sqrt{2}i$ Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 5 (1,25 puntos)

Considerá la matriz $M = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$

Elegí la única opción que indica el/los valores de k para el/los cual/es la matriz admite inversa.

A) Para ningún número real k.

B) $\mathbb{R} - \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$

C) $\left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$

D) Para todo número real k.

Respuesta: B)

Resolución

Si se calcula el determinante de la matriz M, se obtiene la expresión $k^3 - 2k$. Esa expresión debe ser distinta de cero para que la matriz admita inversa y eso sucede para todos los reales excepto $\left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesiones 9 y 10.

- Ejercicio 6 (1,25 puntos)

Considerá las matrices: $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ y $D = A^{-1} - B^t \cdot C$

Indicá la única opción que muestra el valor del coeficiente d_{21} de la matriz D.

A) $-\frac{5}{4}$

B) 0

C) 5

D) $\frac{53}{2}$

Respuesta: A)

Resolución

Hallando primero la matriz traspuesta de B y la inversa de A podemos realizar las operaciones indicadas y continuar hallando todos los coeficientes de D. Resulta:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Luego se calcula $D = A^{-1} - B^t \cdot C$ y se obtiene que $d_{21} = -\frac{5}{4}$

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 7 (1,25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (3x_1 + 3x_2 - 2x_3; -x_1 + 2x_2 + 2x_3; x_1 - 2x_2 + 2x_3).$$

Si C representa el cubo unitario, elegí la opción que muestra el volumen de la imagen de C por T.

A) 18 | C) 36 | Respuesta: C)

B) -36 | D) -18

Resolución

Armamos la matriz asociada a T que es $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculando el determinante de esta matriz tenemos que es 36. Y como Volumen de $T(C)$ = (Volumen de C) $|\det(A_T)|$ (donde C es un cuerpo en $\mathbb{R}^3$) tenemos la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 8 (1,25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (3x_1 + 3x_2 - 2x_3; -x_1 + 2x_2 + 2x_3; x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

Elegí la opción que muestra la dimensión del núcleo de T.

A) 0 | C) 2 | Respuesta: A)

B) 1 | D) 3

Resolución

Igualando el vector imagen al vector nulo tenemos $(3x_1 + 3x_2 - 2x_3; -x_1 + 2x_2 + 2x_3; x_1 - 2x_2 + 2x_3) = (0, 0, 0)$ de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz asociada a este sistema tiene determinante no nulo entonces este sistema tiene solución única, y al ser homogéneo ésta es el vector nulo. Por lo tanto la dimensión del núcleo es cero. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.
