UBAXXI - Álgebra A - Recuperatorio del 1er. Parcial - 21/06/2023 - Tema 4: resolución

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

Elegí la opción que muestra un posible valor de k para que el conjunto $\{(2,-1,-1),(1,1,3),(1,1,k)\}$ sea linealmente dependiente.

A) -3
B) 3
C) -1
D) 1

Respuesta: B)

Resolución
A partir de $\{(2,-1,-1),(1,1,3),(1,1,k)\}$ tomando las dos primeras coordenadas tenemos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2\alpha+\beta=1 \\ -\alpha+\beta=1 \end{cases}$. De donde obtenemos que $\alpha=0$ y $\beta=1$. Usando esto en la tercera componente nos queda que $3=0+3=0+3\cdot 1=k$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Elegí la opción que indica los valores que puede tomar k si se quiere que el conjunto $\{(1,0,1),(1,k,0),(0,-1,k+1)\}$ no sea una base de $\mathbb{R}^3$.

A) $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$
B) $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$
C) $k \in \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$
D) $k \in \emptyset$

Respuesta: C)

Resolución
Para que el conjunto $\{(1,0,1),(1,k,0),(0,1,k+1)\}$ no sea base debe ser que alguno de los vectores sea combinación lineal de los otros. Entonces planteamos $\{(1,0,1),(1,k,0),(0,-1,k+1)\}$, de la primer componente tenemos que $m=1$ y usando esto y las otras dos componentes obtenemos el sistema: $\begin{cases} 0=k-n \\ 1=n(k+1) \end{cases}$. De aquí despejamos $n=k$ y $1=k(k+1)$, de esta última obtenemos $k^2+k-1=0$ de donde salen los valores de k para los cuales el conjunto no es una base. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

Indica la única opción que corresponde a una circunferencia con el mismo centro que $x^2+y^2-9x+6y+25,25=0$ y cuyo radio sea el doble de ésta.

A) $(x-4,5)^2+(y+3)^2=16$
B) $x^2+y^2-9x+6y+21,25=0$
C) $(x+4,5)^2+(y+3)^2=4$
D) $(x+4,5)^2+(y-3)^2=8$

Respuesta: A)

Resolución
Completando cuadrados podemos obtener la expresión canónica de la circunferencia $(x-4,5)^2+(y+3)^2=4$ de la que surge que su centro $C=(4,5;-3)$ y radio 2 . La circunferencia que cumple con lo pedido es aquella que tiene las mismas coordenadas del centro pero radio 4. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)
La parábola P tiene vértice $V = (-2; 3)$ y foco $F = (-3; 3)$ seleccioná la única opción que contiene su expresión canónica y la ecuación de su directriz.

A) $-4(x+2) = (y-3)^2$; directriz: $x = -4$

B) $-4(x+2) = (y-3)^2$; directriz: $x = -1$

C) $(y-3)^2 = -4(x+2)$; directriz: $y = 3$

D) $(x+2)^2 = -4(y-3)$; directriz: $y = 4$

Respuesta: B)

Resolución
Teniendo en cuenta las coordenadas del vértice y el foco,podemos afirmar que la parábola es de la forma $(y - y_v)^2 = -2p(x - x_v)$, y la ecuación de su directriz $x = x_v + \frac{p}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
Dados los vectores: $\vec{v_1} = \left(-\frac{1}{2}; -2; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{v_2} = \left(-2\sqrt{3}; \sqrt{3}; -3\sqrt{3}\right)$ y $\vec{v_3} = \sqrt{3}\vec{v_2} + \vec{v_1}$.
Elegí la única opción que muestra el resultado de $\vec{v_3} \cdot \vec{v_2}$.

A) $\frac{161}{4}$

B) $\frac{161\sqrt{3}}{4}$

C) $\left(13\sqrt{3}; \sqrt{3}; \frac{105\sqrt{3}}{4}\right)$

D) $\frac{3\sqrt{213}}{4}$

Respuesta: B)

Resolución
Para encontrar la respuesta, primero hay que calcular las coordenadas de $\vec{v_3}$:
$\vec{v_3} = \sqrt{3}\left(-2\sqrt{3}; \sqrt{3}; -3\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}; -2; \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{13}{2}; 1; -\frac{35}{4}\right)$. Y luego queda pendiente realizar el producto escalar: $\vec{v_3} \cdot \vec{v_2} = \left(-\frac{13}{2}; 1; -\frac{35}{4}\right) \cdot \left(-2\sqrt{3}; \sqrt{3}; -3\sqrt{3}\right) = \frac{161\sqrt{3}}{4}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
$\vec{w} = (w_x; w_y)$ es un vector de norma $\sqrt{34}$ del primer cuadrante, que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el vector $\vec{v} = (4; -1)$. Elegí la única opción que indica la coordenada w_x.

A) 3

B) -5

C) 5

D) $\frac{4}{17}$

Respuesta: C)

Resolución
Como $\vec{w}$ tiene norma $\sqrt{34}$ podemos plantear que $\sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{34}$. además, como el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{v} = (4; -1)$ es $\frac{\pi}{4}$ se puede plantear que: $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. De estas dos ecuaciones se puede deducir que $w_x^2 + (4w_x - 17)^2 = 34$ con lo cual $w_x = 5$ o $w_x = 3$. Si $w_x = 3$ resulta que $w_y = -5$, se descarta esta opción porque $\vec{w}$ es un vector del primer cuadrante. Si $w_x = 5$ resulta $w_y = 3$. Es decir, $\vec{w} = (5; 3)$ y este vector sí es del primer cuadrante. Luego la respuesta es $w_x = 5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)
  L es la recta que pasa por los puntos $(4,-1,10)$ y $(1,-1,9)$ y Π es el plano que contiene al punto $(-1,2,3)$ y resulta ortogonal a L. Indicá cuál es la única opción que muestra las coordenadas de P, el punto de intersección entre la recta L con el plano Π.

  A) $\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{51}{5}\right)$
  B) $\left(-\frac{13}{5}, -1, \frac{25}{3}\right)$
  C) $\left(-\frac{18}{5}, -1, -\frac{6}{5}\right)$
  D) $\left(-\frac{13}{5}, -1, \frac{39}{5}\right)$

  Respuesta: D)

  Resolución
  Primero podemos armar la recta L, sabiendo dos puntos tenemos que $L : \{(x,y,z) = \alpha[(1,-1,9) - (4,-1,10)] + (1,-1,9)\}$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Es decir, $(x,y,z) = \alpha(-3,0,-1) + (1,-1,9)$. Y como, el vector director de la recta es $(-3,0,-1)$, el plano Π resulta tener a éste como vector normal. Considerando además que el plano tiene como uno de sus puntos al $(-1,2,3)$, nos queda que $\Pi : -3x - z = 0$. Finalmente, solo queda hallar la intersección de recta y plano, obteniendo que esto solo ocurre para $\alpha = \frac{6}{5}$ nos queda que el punto es $\left(-\frac{13}{5}, -1, \frac{39}{5}\right)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
  $P = (-1,-3,12)$es la proyección en el plano $\Pi : -x + 3y - z = -20$ del punto Q.
  Indicá la única opción que muestra las coordenadas de un posible punto Q.

  A) $Q = (-1,3,-1)$
  B) $Q = (0,-6,-13)$
  C) $Q = (-2,0,11)$
  D) $Q = (-1,-3,12)$

  Respuesta: C)

  Resolución
  Como Q debe ser un punto que al proyectarlo en el plano dado nos dé P, entonces debe cumplirse que Q sea un punto de la recta ortogonal al plano que pasa por P. Buscamos la recta mencionada y veamos cuál de los puntos dados pertenece a la misma. La recta tiene que tener la dirección de la normal del plano y pasar por el punto P, por lo tanto, la ecuación de la recta es: $L = \{(x,y,z) = \alpha(-1,3,-1) + (-1,-3,12); \alpha \in \mathbb{R}\}$. El único punto de las opciones que cumple que pertenece a la recta es el que se ofrece en la opción C). Estos contenidos los encontrás en las sesiones 2 y 3.
