UBAXXI - Álgebra A - Recuperatorio del 1er. Parcial - 21/06/2023 - Tema 3: resolución

---

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)
  Elegí la opción que muestra un posible valor de k para que el conjunto $\{(1,-1,1),(1,1,3),(1,-3,k)\}$ sea linealmente dependiente.

  A) -2
  B) -1
  C) 0
  D) 1

  Respuesta: B)

  Resolución
  A partir de $\{(1,-1,1),(1,1,3),(1,-3,k)\}$ tomando las dos primera coordenadas tenemos el sistema de ecuaciones $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ -\alpha+\beta=-3\end{cases}$. De donde obtenemos que $\alpha=2$ y $\beta=-1$. Usando esto en la tercer componente nos queda que $-1=2-3=2+3\cdot(-1)=k$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)
  Elegí la opción que indica los valores que puede tomar k si se quiere que el conjunto $\{(2,0,-1),(2,k,0),(0,1,k+2)\}$ no sea una base de $\mathbb{R}^3$.

  A) $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2}\}$
  B) $k\in\mathbb{R}\setminus\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$
  C) $k\in\{-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2}\}$
  D) $k\in\emptyset$

  Respuesta: C)

  Resolución
  Para que el conjunto $\{(2,0,-1),(2,k,0),(0,1,k+2)\}$ no sea base debe ser que alguno de los vectores sea combinación lineal de los otros. Entonces planteamos $(2,0,-1)=m(2,k,0)+n(0,1,k+2)$, de la primer componente tenemos que $2=2m$ o sea que $m=1$ y usando esto y las otras dos componentes obtenemos el sistema: $\begin{cases}0=k+n\\ -1=n(k+2)\end{cases}$. De aquí despejamos $n=-k$ y $-1=-k(k+2)$, de esta última obtenemos $k^2+2k-1=0$ de donde salen los valores de k para los cuales el conjunto no es una base. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)
  Indica la única opción que corresponde a una circunferencia que tenga el mismo centro que $x^2+y^2-9x+6y+13,25=0$ y cuyo radio sea la mitad del de ésta.

  A) $(x-4,5)^2+(y+3)^2=16$
  B) $x^2+y^2-9x+6y+21,25=0$
  C) $(x-4,5)^2+(y+3)^2=4$
  D) $(x+4,5)^2+(y-3)^2=8$

  Respuesta: C)

  Resolución
  Completando cuadrados podemos obtener la expresión canónica de la circunferencia $(x-4,5)^2+(y+3)^2=16$ de la que surge que su centro $C=(4,5;-3)$ y radio 4 . La circunferencia que cumple con lo pedido es aquella que tiene las mismas coordenadas del centro y radio 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)
  La parábola P tiene vértice $V = (1; 2)$ y foco $F = (-3; 2)$.
  Seleccioná la única opción que contiene su expresión canónica y la ecuación de su directriz.

  A) $16(x-1) = (y-2)^2$; directriz: $x = 5$
  B) $-8(x+1) = (y+2)^2$; directriz: $x = -3$
  C) $(x-1)^2 = -16(y-2)$; directriz: $y = 6$
  D) $(y-2)^2 = -16(x-1)$; directriz: $x = 5$

  Respuesta: D)

  Resolución
  Teniendo en cuenta las coordenadas del vértice y el foco, podemos afirmar que la parábola es de la forma $(y - y_v)^2 = -2p(x - x_v)$, y la ecuación de su directriz: $x = x_v + \frac{p}{2}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
  Dados los vectores: $\vec{v_1} = \left(\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{4}\right)$, $\vec{v_2} = \left(\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; 4\sqrt{3}\right)$ y $\vec{v_3} = \sqrt{3}\vec{v_2} - \vec{v_1}$.
  Elegí la única opción que muestra el resultado de $\vec{v_2} \cdot \vec{v_3}$.

  A) $\frac{115\sqrt{3}}{2}$
  B) $\frac{115}{2}$
  C) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 10\sqrt{3}; 45\sqrt{3}\right)$
  D) $\frac{5\sqrt{101}}{4}$

  Respuesta: A)

  Resolución
  Para encontrar la respuesta, primero hay que calcular las coordenadas de $\vec{v_3}$:
  $\vec{v_3} = \sqrt{3}\left(\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; 4\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{5}{2}; -5; \frac{45}{4}\right)$.
  Y luego queda pendiente realizar el producto escalar:
  $\vec{v_2} \cdot \vec{v_3} = \left(\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; 4\sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}; -5; \frac{45}{4}\right) = \frac{115\sqrt{3}}{2}$.
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
  $\vec{w} = (w_x; w_y)$ es un vector de norma $\sqrt{34}$ del primer cuadrante, que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el vector $\vec{v} = (4; -1)$. Elegí la única opción que indica la coordenada w_y.

  A) 3
  B) -5
  C) 5
  D) $\frac{4}{17}$

  Respuesta: A)

  Resolución
  Como $\vec{w}$ tiene norma $\sqrt{34}$ podemos plantear que $\sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{34}$. además, como el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{v} = (4; -1)$ es $\frac{\pi}{4}$ se puede plantear que: $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. De estas dos ecuaciones se puede deducir que $w_x^2 + (4w_x - 17)^2 = 34$ con lo cual $w_x = 5$ o $w_x = 3$. Si $w_x = 3$ resulta que $w_y = -5$, se descarta esta opción porque $\vec{w}$ es un vector del primer cuadrante. Si $w_x = 5$ resulta $w_y = 3$. Es decir, $\vec{w} = (5; 3)$ y este vector sí es del primer cuadrante. Luego la respuesta es $w_y = 3$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)
  L es la recta que pasa por los puntos $(1, -10, 5)$ y $(1, -12, 3)$ y Π resulta el plano que contiene a al punto $(-1, 2, 3)$ y resulta ortogonal a L. Indicá cuál es la única opción que muestra las coordenadas de P, el punto de intersección entre la recta L con el plano Π.

  A) $(1, -5, 10)$
  B) $(0, 2, 2)$
  C) $(1, -12, 3)$
  D) $(1, -8, 7)$

  Respuesta: A)

Resolución
Primero podemos armar la recta L, sabiendo dos puntos tenemos que $L = \{(x, y, z) = \alpha[(1, -10, 5) - (1, -12, 3)] + (1, -10, 5)\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Es decir, $(x, y, z) = \alpha(0, 2, 2) + (1, -10, 5)$. Y como, el vector director de la recta es $(0, 2, 2)$, el plano Π resulta tener a éste como vector normal. Considerando además que el plano tiene como uno de sus puntos al $(-1, 2, 3)$, nos queda que $\Pi : 2y + 2z = 10$. Finalmente, solo queda hallar la intersección de recta y plano, obteniendo que esto solo ocurre para $\alpha = \frac{5}{2}$ nos queda que el punto es $(1, -5, 10)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
  $P = (1, 3, -9)$es la proyección en el plano $\Pi : x - 3y - z = 1$ del punto Q. Indicá la única opción que muestra las coordenadas de un posible punto Q.

  A) $(1, 3, 9)$
  B) $(2, 0, -10)$
  C) $(1, 0, -10)$
  D) $(0, 6, -10)$

  Respuesta: B)

Resolución
Como Q debe ser un punto que al proyectarlo en el plano dado nos dé P, entonces debe cumplirse que Q sea un punto de la recta ortogonal al plano que pasa por P. Buscamos la recta mencionada y veamos cuál de los puntos dados pertenece a la misma. La recta tiene que tener la dirección de la normal del plano y pasar por el punto P, por lo tanto, la ecuación de la recta es: $\{(x, y, z) = \alpha(1, -3, -1) + (1, 3, -9)$. El único punto de las opciones que cumple que pertenece a la recta es el que se ofrece en la opción B). Estos contenidos los encontrás en las sesiones 2 y 3.
