UBAXXI - Álgebra A - 2do. Parcial - 14/06/2023 - Tema 6: resolución

---

- Ejercicio 1 (1,25 puntos)

$(-b; a; a; b)$ es la solución del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_4 = 3 \\ 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$ siendo $a, b \in \mathbb{Z}$

Elegí la única opción que muestra los valores de a y de b.

A) $a = 2$ y $b = 1$ C) $a = 2$ y $b = 2$ Respuesta: A)

B) $a = b = 0$. D) $a = 2$ y $b = -1$

Resolución

Si se triangula el sistema, se encuentra que es compatible determinado. Si se iguala coordenada a coordenada la solución $(-1; 2; 2; 1)$ obtenida con $(-b; a; a; b)$ se podrán determinar los valores de a y de b. Otro recorrido posible es que como sabemos que $(-b; a; a; b)$ es la solución del sistema, alcanza con reemplazar las coordenadas vector en cada ecuación para obtener los valores de a y b. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1,25 puntos)

D es la matriz que se obtiene como $D = 3 \cdot A^t + B \cdot C^{-1}$ siendo A, B, C las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Elegí la única opción que muestra los coeficientes de la matriz D.

A) $D = \begin{pmatrix} 11 & -21 \\ -13 & -26 \end{pmatrix}$ C) $D = \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ -6 & -15 \end{pmatrix}$ Respuesta: A)

B) $D = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}$ D) $D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Resolución

Calculando $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se puede realizar el producto $B \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}$.

Conociendo A es posible escribir $3 \cdot A^t = \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ -6 & -15 \end{pmatrix}$. Al realizar la suma de matrices $3 \cdot A^t + B \cdot C^{-1}$ se obtiene la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

- Ejercicio 3 (1,25 puntos)

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (-2x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3; x_1 - x_2)$$

¿Cuál de los siguientes valores corresponde a la dimensión del núcleo de T?

A) 0 C) 2 Respuesta: A)

B) 1 D) 3

Resolución

Igualando el vector imagen al vector nulo tenemos $(-2x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2) = (0, 0, 0)$ de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz asociada a este sistema tiene determinante no nulo entonces este sistema tiene solución única, y al ser homogéneo, esta es el vector nulo. Por lo tanto la dimensión del núcleo es cero. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 4 (1,25 puntos)
  Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3; x_1 + x_3; x_1 - 3x_2 + 2x_3)$$

Si C representa el cubo unitario, elegí la opción que muestra el volumen de la imagen de C por T.

A) 3
B) 2
C) -2
D) -3

Respuesta: B)

Resolución
Armamos la matriz asociada a T que es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculando el determinante de esta matriz tenemos que es -2. Y como Volumen de $T(C) =$ (Volumen de C) $|\det(A_T)|$ tenemos la respuesta.
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1,25 puntos)
  Sea

$$z = \frac{(9-3i)^2 \cdot 2i^3}{4-3i}$$

Indicá la única opción que muestra el módulo de z.

A) 90
B) $\frac{24\sqrt{10}}{5}$
C) 144
D) 36

Respuesta: D)

Resolución
Para hallar el módulo de z resultará conveniente tener disponibles sus propiedades, con ellas es posible plantear lo siguiente:

$$|z| = \frac{(|9-3i|)^2 \cdot |2||i^3|}{|4-3i|} = \frac{(\sqrt{90})^2 \cdot 2}{5} = 36$$

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1,25 puntos)
  Sea M el conjunto de soluciones de la ecuación

$$\frac{z^4}{7} = \overline{(1+\sqrt{3}i)} \cdot z$$

Elegí la única afirmación que resulta verdadera.

A) M tiene un elemento que resulta imaginario puro.
B) M no tiene elementos que se ubican en el segundo cuadrante.
C) M no tiene elementos que se ubican en el tercer cuadrante.
D) M no tiene elementos con parte real e imaginaria ambas positivas.

Respuesta: D)

Resolución
Lo primero que podemos observar es que $z = 0$ es una de las soluciones de la ecuación. Siguiendo, para otros casos donde z sea no nulo, podemos pasar dividiendo z y usando la definición de conjugado se nos reduce la ecuación a la siguiente: $\frac{z^3}{7} = 1 - \sqrt{3}i$ o equivalentemente $z^3 = 7 - 7\sqrt{3}i$. Buscando ahora las raíces cúbicas de $7 - 7\sqrt{3}i$ obtenemos tres soluciones con argumentos: $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{11\pi}{9}$ y $\frac{17\pi}{9}$. De allí se puede deducir que se ubican en el segundo, tercer y cuarto cuadrante respectivamente, concluyendo que la única opción correcta es la D).
Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1,25 puntos)
  Sea $C(x)$ el polinomio cociente de la división entre $P(x) = x^4-2x^3+x^2-32x-240$ y $Q(x) = x^2+16$. Indicá la única opción que muestra el polinomio $[C(x)]^2$.

  A) $x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 60x + 225$

  B) $x^4 - 30x^2 + 225$

  C) $x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 60x + 225$

  D) $x^4 + 4x^2 + 225$

  Respuesta: C)

  Resolución
  El polinomio cociente de la división es $C(x) = x^2 - 2x - 15$. El resultado de elevar al cuadrado este polinomio es $[C(x)]^2 = x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 60x + 225$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1,25 puntos)
  Del polinomio $P(x) = x^6 + 5x^4 - 8x^2 - 48$ se sabe que $2i$ es raíz doble. Indicá la única opción que muestra una expresión de $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

  A) $(x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x^2 + 4)^2$

  B) $(x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - 2i) \cdot (x + 2i) \cdot (x - 2i) \cdot (x + 2i)$

  C) $(x^2 + 4) \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$

  D) $(x^2 + 3) \cdot (x^2 + 4)^2$

  Respuesta: A)

  Resolución
  En primer lugar debemos tener en cuenta que si $2i$ es raíz de $P(x)$ también lo es $2i$, en segundo lugar ambas deben tener el mismo grado de multiplicidad. El producto $(x-2i)\cdot(x+2i)\cdot(x-2i)\cdot(x+2i)$ forma parte de la factorización de $P(x)$ y es equivalente a $x^4 + 8x^2 + 16$. Luego dividimos a $P(x)$ por $(x^4 + 8x^2 + 16)$ obteniendo el polinomio cociente $(x^2 - 3)$ que puede descomponerse como $(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})$. Por último debemos tener en cuenta que se solicita la expresión de $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.