## UBAXXI - Álgebra A - 2do. Parcial - 14/06/2023 - Tema 5: resolución

- Ejercicio 1 (1,25 puntos)

$(-a;3b;a;b)$ es la solución del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 1x_3 = 4 \end{cases}$ siendo $a, b \in \mathbb{Z}$.

Elegí la única opción que muestra los valores de $a$ y de $b$.

A) $a = -1$ y $b = 6$ C) $a = 1$ y $b = 2$ Respuesta: C)

B) $a = b = 0$. D) $a = 2$ y $b = 1$

Resolución

Si se triangula el sistema, se encuentra que es compatible determinado. Si se iguala coordenada a coordenada la solución $(-1;6;1;2)$ obtenida con $(-a;3b;a;b)$ se podrán determinar los valores de $a$ y de $b$. Otro recorrido posible es que como sabemos que $(-a;3b;a;b)$ es la solución del sistema, alcanza con reemplazar las coordenadas vector en cada ecuación para obtener los valores de $a$ y $b$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

---

- Ejercicio 2 (1,25 puntos)

$D$ es la matriz que se obtiene como $D = B \cdot C^{-1} + 2 \cdot A^t$ siendo $A, B, C$ las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ , $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Elegí la única opción que muestra los coeficientes de la matriz $D$.

A) $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ C) $D = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ Respuesta: D)

B) $D = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ D) $D = \begin{pmatrix} -16 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

Resolución

Calculando $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, se puede realizar el producto $B \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Conociendo $A$ es posible escribir $2 \cdot A^t = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$. Al realizar la suma de matrices $B \cdot C^{-1} + 2 \cdot A^t$ se obtiene la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 9.

---

- Ejercicio 3 (1,25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1;x_2;x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3; x_1 - x_3)$$

Si $C$ representa el cubo unitario, indicá cuál de los siguientes valores representa el volumen de la imagen de $C$ por $T$.

A) 3 C) 6 Respuesta: C)

B) -6 D) -3

Resolución

Armamos la matriz asociada a $T$ que es $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Calculando el determinante de esta matriz tenemos que es -6. Y como Volumen de $T(C)$ = (Volumen de C) $|\det(A_T)|$ tenemos la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

---

- Ejercicio 4 (1,25 puntos)
  Considerá $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3; x_1 - x_3)$.
  ¿Cuál de los siguientes valores corresponde a la dimensión del núcleo de $T$?

  A) 0    C) 2    Respuesta: A)
  B) 1    D) 3

  Resolución
  Igualando el vector imagen al vector nulo tenemos $(x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3) = (0, 0, 0)$ de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

  Como el determinante de la matriz asociada a este sistema tiene determinante no nulo entonces este sistema tiene solución única, y al ser homogéneo, esta es el vector nulo. Por lo tanto la dimensión del núcleo es cero. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

---

- Ejercicio 5 (1,25 puntos)
  Sea

$$z = \frac{(3-9i)^2 \cdot 2i^3}{-2+6i}$$

  Indicá la única opción que muestra el módulo de $z$.

  A) $\frac{15}{2}$    C) 9    Respuesta: B)
  B) $\frac{90}{\sqrt{10}}$    D) $\frac{180}{\sqrt{10}}$

  Resolución
  Para hallar el módulo de $z$ resultará conveniente tener disponibles sus propiedades, con ellas es posible plantear lo siguiente:

$$|z| = \frac{(|3-9i|)^2 \cdot |2||i^3|}{|-2+6i|} = \frac{(\sqrt{90})^2 \cdot 2}{\sqrt{40}} = \frac{90}{\sqrt{10}}$$

  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

- Ejercicio 6 (1,25 puntos)
  Sea $M$ el conjunto de soluciones de la ecuación

$$\frac{z^4}{5} = \overline{(1-\sqrt{3}i)} \cdot z$$

  Elegí la única afirmación que resulta verdadera.

  A) $M$ tiene un elemento que resulta imaginario puro.
  B) $M$ no tiene elementos que se ubican en el cuarto cuadrante.
  C) $M$ tiene soluciones reales no nulas.
  D) $M$ no tiene elementos que se ubican en el tercer cuadrante.

  Respuesta: B)

  Resolución
  Lo primero que podemos observar es que $z = 0$ es una de las soluciones de la ecuación. Siguiendo, para otros casos donde $z$ sea no nulo, podemos pasar dividiendo $z$ y usando la definición de conjugado se nos reduce la ecuación a la siguiente: $\frac{z^3}{5} = 1+\sqrt{3}i$ o equivalentemente a $z^3 = 5+5\sqrt{3}i$. Buscando ahora las raíces cúbicas de $5+5\sqrt{3}i$ obtenemos tres soluciones con argumentos $\frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$, $\frac{13\pi}{9}$. De allí se puede deducir que se ubican en el primero, segundo y tercer cuadrante respectivamente, concluyendo que la única opción correcta es B).
  Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

---

- Ejercicio 7 (1,25 puntos)
  Sea $Q(x)$ el polinomio cociente de la división entre $A(x) = x^4+5x^3+13x^2+35x+42$ y $B(x) = x^2+7$. Indicá la única opción que muestra el polinomio $[Q(x)]^2$.

  A) $x^4 + 25x^2 + 36$

  B) $x^4 + 12x^2 + 36$

  C) $x^4 - 4x^3 + 58x^2 - 108x + 729$

  D) $x^4 + 10x^3 + 37x^2 + 60x + 36$

  Respuesta: D)

  Resolución
  El polinomio cociente de la división es $Q(x) = x^2 + 5x + 6$. El resultado de elevar al cuadrado este polinomio es $[Q(x)]^2 = x^4 + 10x^3 + 37x^2 + 60x + 36$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

---

- Ejercicio 8 (1,25 puntos)
  Del polinomio $P(x) = x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 5$ se sabe que $-i$ es raíz doble. Indicá la única opción que muestra una expresión de $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

  A) $(x^2 + 5) \cdot (x^2 + 1)^2$

  B) $(x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5}) \cdot (x - i) \cdot (x + i) \cdot (x - i) \cdot (x + i)$

  C) $(x^2 + 1) \cdot (x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5})$

  D) $(x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5}) \cdot (x^2 + 1)^2$

  Respuesta: D)

  Resolución
  En primer lugar debemos tener en cuenta que si $-i$ es raíz de $P(x)$ también lo es $i$ , en segundo lugar ambas deben tener el mismo grado de multiplicidad. El producto $(x-i)\cdot(x+i)\cdot(x-i)\cdot(x+i)$ forma parte de la factorización de $P(x)$ y es equivalente a $x^4 + 2x^2 + 1$. Luego dividimos a $P(x)$ por $(x^4 + 2x^2 + 1)$ obteniendo el polinomio cociente $(x^2 - 5)$ que puede descomponerse como $(x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5})$. Por último debemos tener en cuenta que se solicita la expresión de $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

---