UBAXXI - Álgebra A - 2do. Parcial - 14/06/2023 - Tema 2: resolución

- Ejercicio 1 (1,25 puntos)

Dado el siguiente sistema no homogéneo $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3 = 0 \end{cases}$

Elegí la única opción que muestra su conjunto solución.

A) $\{(0;1;0;0)\}$

B) $\{\alpha(-5;1;0;1) + (0;1;0;0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

C) $\{(-5;1;0;1) + \alpha(0;1;0;0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

D) $\{(-5;1;0;1)\}$

Respuesta: B)

Resolución

Si se escribe el sistema en forma matricial y se lo triangula, una posible forma de escribir el conjunto solución es $(-5x_4; 1 + x_4; 0; x_4)$. De esta expresión se puede encontrar la opción correcta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 8.

- Ejercicio 2 (1,25 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -1 & 5 & 0 \\ -6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Elegí la única opción que muestra el determinante de la matriz A^2.

A) 126

B) 252

C) -126

D) 15876

Respuesta: D)

Resolución

El determinante de una matriz cuadrada se puede calcular como el cuadrado del determinante de la matriz. Con esta propiedad es posible encontrar que el determinante de la matriz dada es -126 y luego, elevar este número al cuadrado para obtener la respuesta al problema. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 10.

- Ejercicio 3 (1,25 puntos)

Considerá la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x_1; x_2; x_3) = (3x_1 - x_2 - x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; 2x_2 + 2x_3).$$

Si C representa el cubo unitario, indicá cuál de los siguientes valores representa el volumen de la imagen de C por T.

A) $\frac{18}{3}$

B) -18

C) 18

D) $-\frac{18}{3}$

Respuesta: C)

Resolución

Armamos la matriz asociada a T que es $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculando el determinante de esta matriz tenemos que es -18. Y como Volumen de $T(C) =$ (Volumen de C) $|\det(A_T)|$ tenemos la respuesta. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 4 (1,25 puntos)

Considerá $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x_1; x_2; x_3) = (3x_1 - x_2 - x_3; x_1 - 2x_2 + x_3; 2x_2 + 2x_3)$. ¿Cuál de los siguientes valores corresponde a la dimensión del núcleo de T?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Respuesta: A)

Resolución
Igualando el vector imagen a vector nulo tenemos $(3x_1-x_2-x_3, x_1-2x_2+x_3, 2x_2+2x_3) = (0,0,0)$ de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz asociada a este sistema tiene determinante no nulo entonces este sistema tiene solución única, y al ser homogéneo, esta es el vector nulo. Por lo tanto la dimensión del núcleo es cero. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 12.

- Ejercicio 5 (1,25 puntos)
Sea z un número complejo que satisface la ecuación

$$\frac{z+3}{5} = 2\overline{z} - 3i$$

Indicá la única opción que muestra la parte real de z

A) $-\frac{15}{11}$ C) $\frac{1}{3}$ Respuesta: C)
B) $-\frac{15}{9}$ D) 2

Resolución
Una estrategia que resulta útil es escribir $z = a+bi$ en la ecuación del enunciado. En este caso, nos quedaría $\frac{a+bi+3}{5} = 2\overline{a+bi} - 3i$ y, de aquí, desarrollando podemos hacer visible la igualdad entre dos números complejos escritos en su forma binómica: $\frac{a+3}{5} + \frac{b}{5}i = 2a + (-2b-3)i$. Usando ahora que "dos números complejos son iguales si coinciden en sus partes reales e imaginarias", podemos plantear que $\frac{a+3}{5} = 2a$ y de allí despejar a, la parte real del complejo z. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 6 (1,25 puntos)
Sean los números complejos $z = 5\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$ y $w = \overline{z} \cdot 2z^6$.
Indicá la única opción que muestra una afirmación verdadera.

A) La parte imaginaria de w es nula.
B) El número w tiene argumento menor a $\frac{3\pi}{2}$ pero mayor a π.
C) El número w se ubica en el cuarto cuadrante.
D) El número w tiene argumento menor a π pero mayor a $\frac{\pi}{2}$.

Respuesta: C)

Resolución
Para resolver este ejercicio podremos elegir la opción correcta si conocemos el argumento de w. Usando la definición de conjugado y las propiedades de De Moivre para producto de complejos, nos queda:
$w = 5\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] \cdot 2 \cdot 5^6 \left[\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{18\pi}{4}\right)\right] = 5 \cdot 2 \cdot 5^6 \left[\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)\right]$
Como sabemos que el argumento de un número complejo es mayor o igual a cero y menor estricto que 2π, ajustando el resultado obtenido, nos queda que el argumento de z es $\frac{7\pi}{4}$. De aquí que la única opción correcta, la C). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 13.

- Ejercicio 7 (1,25 puntos)
Dados los polinomios $A(x) = x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 88x + a$ y $B(x) = x^2 + 8x - 15$, donde $a \in \mathbb{R}$.Se sabe que $A(x)$ es divisible por $(x+5)$.
Indicá la única opción que muestra el polinomio resto de la división de $A(x)$ por $B(x)$.

A) 0
B) $-240x + 780$
C) $-240x + 3330$
D) 165

Respuesta: B)

Resolución
En primer lugar, y teniendo en cuenta el concepto de divisibilidad y el Teorema del resto , determinamos el valor de a resolviendo la ecuación que se obtiene al plantear $A(-5) = 0$, de lo que resulta $a = 165$. Luego, aplicando el algoritmo de la división de polinomios entre $A(x) = x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 88x + 165$ y $B(x)$ obtenemos el resto. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.

- Ejercicio 8 (1,25 puntos)

Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado mínimo tal que $P(\sqrt{7}) = P(-\sqrt{7}) = 0$, $-i$ es raíz doble y $P(-3) = 400$. Elegí la única opción que muestra un polinomio que cumple simultáneamente con todo lo enunciado.

A) $P(x) = 2x^6 - 10x^4 - 26x^2 - 14$

B) $P(x) = x^4 - 6x^2 - 7$

C) $P(x) = 20x^4 - 120x^2 - 140$

D) $P(x) = x^6 - 5x^4 - 13x^2 - 7$

Respuesta: A)

Resolución
Conforme a lo solicitado $P(x) = a \cdot (x - \sqrt{7}) \cdot (x + \sqrt{7}) \cdot (x - i) \cdot (x + i) \cdot (x - i) \cdot (x + i)$ que se puede expresar como $P(x) = a \cdot (x^2 - 7) \cdot (x^2 + 1)^2 = a \cdot (x^6 - 5x^4 - 13x^2 - 7)$. Por último, calculamos el valor del coeficiente principal teniendo en cuenta que debe cumplirse que $P(-3) = 400$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 14.
