- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

Considerá el subespacio $S = \{(x_1; x_2; x_3; x_4) \in \mathbb{R}^4 : 4x_2 - 2x_3 = 0\}$. Elegí la única opción correcta.

A) El vector $(2; 1; -2; 4)$ pertenece al subespacio S.

B) El conjunto $\{(1,0,0,0),(0,1,2,0),(0,0,0,1)\}$ es una base del subespacio S.

C) El conj. $\{(1,0,0,0),(0,1,-2,0),(0,0,0,1)\}$ es un sistema de generadores del subespacio S.

D) La dimensión de S es 4.

Respuesta: B)

Resolución

Dado el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 4x_2 - 2x_3 = 0\}$, nos piden elegir la opción correcta. A partir de esto tenemos que $x_3 = 2x_2$. Con lo cual nos queda $(x_1, x_2, 2x_2, x_4) = x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,2,0) + x_4(0,0,0,1)$, de aquí que el conjunto $\{(1,0,0,0),(0,1,2,0),(0,0,0,1)\}$ es una base de S. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Dados los siguientes planos:

$\Pi = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1; x_2; x_3) = \alpha(1; 2; 0) + \beta(0; 2; 1)\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3\}$

$\Pi' = \{(x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1; x_2; x_3) = \gamma(1; 0; 1) + \delta(0; 1; -2)\ ;\ \gamma, \delta \in \mathbb{R}^3\}$.

Decidí cuál de los siguientes conjuntos de vectores es base del subespacio $\Pi \cap \Pi'$.

A) $\{(13; 12; -11)\}$

B) $\{(-5; -4; 3)\}$

C) $\{(5; 4; 3)\}$

D) $\{(5; 4; 3), (-5; -4; 3)\}$

Respuesta:B)

Resolución

Buscando la recta intersección de los planos Π, Π' y tomando su vector director como base del subespacio, llegamos a la base correcta $\{(-5; -4; 3)\}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

La circunferencia B tiene radio $r = \sqrt{7}$ y centro $Q = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$, elegí la única afirmación correcta.

A) La expresión canónica de B es $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \sqrt{7}$

B) La circunferencia B es tangente a los dos ejes cartesianos.

C) La circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 3x - 2,5y - \frac{3}{16} = 0$ tiene el mismo centro que B.

D) El punto $P = \left(\frac{3}{2}, \sqrt{7} - \frac{5}{4}\right)$pertenece a la circunferencia B .

Respuesta: C)

Resolución

La expresión canónica de la circunferencia es B es $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 7$. Las coordenadas del punto P no satisfacen esta expresión. El centro Q se encuentra a una distancia menor a $\sqrt{7}$ de los ejes por lo que no es tangente a ninguno de ellos. Completando cuadrados en la ecuación $x^2 + y^2 + 3x - 2,5y - \frac{3}{16} = 0$ llegamos a $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 4$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)

Elegí la única opción que indica las coordenadas del punto de intersección de las asíntotas de la hipérbola de ecuación $3x^2 - 2y^2 - 18x - 16y = 6$.

A) $(-3; 4)$
B) $(3; 4)$
C) $(-3; -4)$
D) $(3; -4)$

Respuesta: D)

Resolución
La expresión canónica de esta hipérbola es $\frac{(x-3)^2}{\frac{1}{3}} - \frac{(y+4)^2}{0{,}5} = 1$, en ella resulta fácil la visualización de las coordenadas del centro de la hipérbola que es el punto en el que se cortan las asíntotas. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)

Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$; $\vec{v}$ un vector de norma $\sqrt{3}$ y $\vec{w}$ un vector de norma 4. Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ es el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, elegí la única opción que muestra el resultado del producto escalar entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

A) $4\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{6}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Respuesta: C)

Resolución
El producto escalar entre vectores se puede calcular como: $\vec{v} \cdot \vec{w} = ||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot cos(\alpha)$. Reemplazando los datos del problema se puede encontrar que $\vec{v} \cdot \vec{w} = 2\sqrt{6}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)

Si la distancia entre los puntos $A = \left(4; \frac{1}{2}; -3\right)$, $B = \left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ es la misma que entre los puntos $C = (-6; k; 4k)$ y $D = (-11; k; 4,5)$, elegí la única opción que muestra todos los posibles valores de $k \in \mathbb{R}$.

A) $\frac{1}{4}; \frac{7}{16}$
B) $-\frac{7}{16}; \frac{43}{16}$
C) $\frac{1}{2}; \frac{7}{4}$
D) $\frac{1}{2}$

Respuesta: C)

Resolución
Para resolver este problema es necesario calcular primero la distancia entre los puntos A y B como $dist(A; B) = \sqrt{(4+1)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-3 + \frac{1}{2}\right)^2}$. El resultado obtenido será $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. Igualando la distancia entre C y D a dicho valor será posible calcular los valores de k: $\frac{1}{2}; \frac{7}{4}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)

Indicá cuál de las siguientes opciones muestra la forma implícita y vectorial del mismo plano.

A) $-x_1 + 3x_2 - x_1 = 2$ y $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(2, -1, 1) + \beta(-1, 0, 1) + (-2, 0, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
B) $-x_1 - 3x_2 - x_1 = 0$ y $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(2, -1, 1) + \beta(-1, 0, 1) + (-2, 0, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
C) $-2x_1 = 0$ y $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(2, -1, 1) + \beta(-1, 0, 1) + (-2, 0, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
D) $x_1 + 3x_2 + x_1 = -2$ y $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(2, -1, 1) + \beta(-1, 0, 1) + (-2, 0, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Respuesta: D)
Este ejericio se considera bien porque hubo un error de subíndice en uno de los coeficientes de las opciones.

El producto vectorial entre los vectores $(2, -1, 1)$ y $(-1, 0, 1)$ nos da $(-1, -3, -1)$ por lo que dos de las opciones ya las podemos descartar, aquellas que no indican un vector normal múltiplo de $(-1, -3, -1)$, algo que sí se cumple para las dos restantes. Sin embargo, solo una de las dos opciones que restan es la correcta, para averiguar de cuál se trata, podemos comprobar si el punto de paso de cada plano cumple efectivamente la ecuación implícita correspondiente. Esto solo ocurre en la opción D). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 2.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)

Sea $L = \{(x, y, z) = \alpha(-5, 4, 1) + (1, 1, 1)$ con $\alpha \in \mathbb{R}\}$ Indicá la única opción que muestra todos los puntos de la recta L que están a distancia $\sqrt{381}$ del origen de coordenadas.

A) $(14, 4, 13)$

B) $(-9, 9, 3)$ y $(11, -7, -1)$

C) $(-14, 13, 4)$ y $(16, -11, -2)$

D) $(-46, 37, 10)$

Respuesta: C)

Resolución

Planteamos la ecuación de distancia entre los puntos de la recta y el $(0, 0, 0)$, sabiendo que su valor es $\sqrt{381}$: $\sqrt{(-5\alpha + 1 - 0)^2 + (4\alpha + 1 - 0)^2 + (\alpha + 1 - 0)^2} = \sqrt{381}$. A partir de este planteo, solo nos resta despejar los valores de α que corresponden a los puntos de L buscados. Desarrollando nos queda que: $25\alpha^2 - 10\alpha + 1 + 16\alpha^2 + 8\alpha + 1 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 381 \rightarrow 42\alpha^2 + 3 = 381$. De donde deducimos que α es igual a 3 o -3. Reemplazando en la ecuación de la recta, obtenemos que los puntos buscados son los que se ofrecen en la opción C). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.
