UBAXXI - Álgebra A - 1er. Parcial - 26/04/2023 - Tema 2: resolución

---

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

El vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ de norma $\sqrt{154}$ es paralelo al vector $\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$. Elegí cuál de las siguientes opciones puede mostrar las posibles coordenadas de $\vec{w}$.

A) $\sqrt{154}\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$

B) $(-8; -9; 3)$

C) $\left(-\frac{8}{3}; -3; 1\right)$

D) $\left(-\frac{308}{3}; -\frac{231}{2}; -\frac{77}{2};\right)$

Respuesta: B)

Resolución

Como $\vec{w}$ es paralelo a $\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$, se puede expresar a $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$ donde $k \in \mathbb{R}$. Luego, con la condición de que la norma de $\vec{w}$ es $\sqrt{154}$ se puede plantear que: $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}k\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}k\right)^2 + \left(\frac{1}{4}k\right)^2} = \sqrt{154}$. De esta ecuación se puede despejar k y así determinar las coordenadas posibles para $\vec{w}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

El vector $\left(\frac{1}{2}; -3; 8\right)$ es ortogonal al vector $(-4; a; 1)$ y también ortogonal al vector $(-a; -3; -b)$. Elegí la única opción que muestra los valores de a y b.

A) $a = 2$, $b = 1$

B) $a = -2$, $b = 1$

C) $a = -2$, $b = 0$

D) $a = 2$, $b = -1$

Respuesta: A)

Resolución

Dos vectores ortogonales tienen producto escalar nulo. Con esta condición será posible encontrar el valor de a y el de b que verifican el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -2 - 3a + 8 = 0 \\ -\frac{a}{2} + 9 - 8b = 0 \end{cases}$

Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

Considere las rectas L_1 y L_2, cuyas ecuaciones son:
$L_1 = \{(x_1, x_2, x_3) = \alpha(5, -1, -6) + (1, 0, 1); \alpha \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 = 0; -x_1 + x_3 = 0\}$.
Indicá la única opción que muestra la posición relativa de L_1 con respecto a L_2.

A) Las rectas son paralelas.

B) Las rectas son alabeadas y ortogonales.

C) Las rectas son alabeadas pero no ortogonales.

D) Las rectas se intersecan en un único punto.

Respuesta: B)

Resolución

Lo que podemos hacer es escribir a la segunda recta en forma vectorial para identificar de allí su vector director, obtenemos que, L_2 se puede escribir como $\beta(1, -1, 1)$. Luego, observamos que los vectores directores de las rectas no son múltiplos, por lo que no se trata de rectas paralelas. Se puede comprobar ahora que el producto escalar entre dichos vectores se anula, por lo que las rectas resultan ortogonales. Finalmente, para ver si las rectas se intersecan, o no, podemos ver si algún punto de la primera recta $\alpha(5, -1, -6) + (1, 0, 1)$, cumple las dos ecuaciones de la segunda, $x_1 + x_2 = 0; -x_1 + x_3 = 0$. Como esto no ocurre para ningún valor de α, concluímos que las rectas no se intersecan y como no son paralelas resultan alabeadas. Además vimos que son ortogonales, esto nos dice que la opción correcta es la B). Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.) Sea el plano $\Pi : x - 3y - z = -3$.
  Indicá la única opción que muestra la distancia de Π al origen de coordenadas.

  A) 3 C) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ Respuesta: B)

  B) $\frac{3}{\sqrt{11}}$ D) $\frac{9}{11}$

  Resolución
  Para calcular la distancia entre el punto $(0,0,0)$ y π, hay que primero hallar el punto del plano más cercano al $(0,0,0)$ y eso se consigue calculando la intersección del plano con la recta ortogonal a éste. Es decir, debemos hallar la intersección del plano con la recta con dirección $\vec{N}$ y que pasa por el origen de coordenadas. La intersección entre recta y plano nos da el punto $Q = \left(-\frac{3}{11}, \frac{9}{11}, \frac{3}{11}\right)$. Finalmente, la distancia de Q al origen de coordenadas es $\frac{3}{\sqrt{11}}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
  Elegí la opción que indica los valores que puede tomar k si se quiere que el conjunto $\{(3,0,-1), (-6,2k,0), (0,-6,k-1)\}$ no sea una base de $\mathbb{R}^3$.

  A) $k \in \mathbb{R} \setminus \{3,-2\}$ C) $k \in \{3,-2\}$ Respuesta: C)

  B) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3,2\}$ D) $k \in \emptyset$

  Resolución
  Para que el conjunto $\{(3,0,-1), (-6,2k,0), (0,-6,k-1)\}$ no sea base debe ser que alguno de los vectores sea combinación lineal de los otros. Entonces planteamos $(3,0,-1) = m(-6,2k,0) + n(0,-6,k-1)$, de la primer componente tenemos que $3 = -6m$ o sea que $m = -\frac{1}{2}$ y usando esto y las otras dos componentes obtenemos el sistema: $\begin{cases} 0 = -k - 6n \\ -1 = n(k-1) \end{cases}$. De aquí despejamos $n = -\frac{1}{6}k$ y $-1 = -\frac{1}{6}k(k-1)$, de esta última obtenemos $k^2 - k - 6 = 0$ de donde salen los valores de k para los cuales el conjunto no es base. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
  Elegí la opción que muestra los valores que puede tomar k si se quiere que el conjunto $\{(0,-2,-1), (k,1,0), (-8,0,k+3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ tenga dimensión 3.

  A) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1,4\}$ C) $k \in \{1,-4\}$ Respuesta: B)

  B) $k \in \mathbb{R} \setminus \{1,-4\}$ D) $k \in \emptyset$

  Resolución
  Para que el conjunto $\{(0,-2,-1), (k,1,0), (-8,0,k+3)\}$ tenga dimensión 3 debe ser una base de $\mathbb{R}^3$. Resulta más cómodo ver cuando no es una base y descartar esos valores. Para que no sea una base debe ser que alguno de los vectores sea combinación lineal de los otros. Entonces planteamos $(0,-2,-1) = m(k,1,0) + n(-8,0,k+3)$, de la segunda componente tenemos que $-2 = m$ y usando esto y las otras dos componentes obtenemos el sistema: $\begin{cases} -1 = n(k+3) \\ 0 = -2k - 8n \end{cases}$. De aquí despejamos $n = -\frac{1}{4}k$ y $-1 = -\frac{1}{4}k(k+3)$, de esta última obtenemos $k^2 + 3k - 4 = 0$ de donde salen los valores de k para los cuales el conjunto no es una base. Entonces los valores para los cuales el conjunto tiene dimensión 3 son $\mathbb{R} \setminus \{1,-4\}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)

El punto $P = (4,2;9)$ pertenece a la elipse E con focos $F_1 = (3;5,5)$ y $F_2 = (3;8,5)$.
Elegí la única opción correcta respecto de E.

A) El semieje mayor mide 2.

B) Su ecuación es $\frac{(x+7)^2}{2} + \frac{(y+3)^2}{5} = 1$

C) El semieje mayor mide $2,5$.

D) Su ecuación es $\frac{(x-7)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

Respuesta: C)
Resolución
La suma de las distancias a los focos de todos los puntos de la elipse es constante e igual a k . En este caso $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 5; k = 5$. Los vértices de la elipse que se encuentran sobre el eje focal cumplen con esta definición por lo que $k = 2a$, de lo que surge que el semieje mayor mide $2,5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)

Elegí la opción que muestra la ecuación de la parábola de foco $(-2;-2,5)$ y directriz $y = 1$.

A) $(x+2)^2 = 7 \cdot (y+0,75)$

B) $x^2 - 4x + 7y - 1,25 = 0$

C) $(x+2)^2 = -3,5 \cdot (y+0,75)$

D) $x^2 + 4x + 7y + 9,25 = 0$

Respuesta: D)

Resolución
La distancia entre el foco $(-2;-2,5)$ y la directriz $y = 1$ es $p = 3,5$. El vértice de la parábola se encuentra en el punto medio entre ambos y tiene la misma abscisa que el foco: $V = (-2;-0,75)$. Dado que $-2,5 < 1$ y$2p = 7$, la ecuación de la parábola puede escribirse como:
$(x+2)^2 = -7 \cdot (y+0,75)$. Si se desarrolla y se escribe la ecuación implícita de la parábola se obtiene: $x^2 + 4x + 7y + 9,25 = 0$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.
