UBAXXI - Álgebra A - 1er. Parcial - 26/04/2023 - Tema 10: resolución

---

- Ejercicio 1 (1.25 pto.)

El producto escalar entre los vectores de $\mathbb{R}^3$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $-3\sqrt{3}$, la norma de $\vec{v}$ es 6 y la norma de $\vec{w}$ es $\sqrt{3}$. Elegí la única opción que muestra el ángulo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

A) $\frac{\pi}{3}$
B) $\frac{2\pi}{3}$
C) $-\frac{1}{2}$
D) $\frac{3\pi}{2}$

Respuesta: B)

Resolución
Para resolver este problema hay que tener presente la fórmula para hallar el ángulo entre vectores: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\cdot||\vec{w}||}$ Reemplazando los datos del problema, se obtiene que $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ de donde se deduce que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 2 (1.25 pto.)

Si se le aplica al vector $\left(-3; 9; \frac{2}{3}\right)$ una dilatación $\alpha = 2$ seguida de una traslación con dirección $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ se obtiene el vector $\left(-11; 19; \frac{5}{6}\right)$. Si se aplica al vector $\left(\frac{1}{4}; -2; -\frac{1}{3}\right)$ la misma dilatación seguida de la misma traslación con dirección $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, se obtiene el vector $\vec{w}$. Elegí la única opción que muestra las coordenadas de $\vec{w}$.

A) $\left(\frac{1}{4}; -2; -\frac{1}{3}\right)$
B) $\left(-\frac{9}{2}; -3; -\frac{7}{6}\right)$
C) $\left(-11; 19; \frac{5}{6}\right)$
D) $\left(-5; 1; -\frac{1}{2}\right)$

Respuesta: B)

Resolución
De la ecuación $2\cdot\left(-3; 9; \frac{2}{3}\right) + \vec{v} = \left(-11; 19; \frac{5}{6}\right)$ se puede deducir que $\vec{v} = \left(-5; 1; -\frac{1}{2}\right)$. Luego queda plantear: $2\cdot\left(\frac{1}{4}; -2; -\frac{1}{3}\right) + \left(-5; 1; -\frac{1}{2}\right)$ para obtener las coordenadas de $\vec{w} = \left(-\frac{9}{2}; -3; -\frac{7}{6}\right)$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 1.

- Ejercicio 3 (1.25 pto.)

Sean las rectas $L_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : (\alpha, \alpha - 3, -11); \alpha \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 : \{(x_1, x_2, x_3) : \beta(-1, -1, 0) + (1, 10, -1); \beta \in \mathbb{R}\}$. Indicá la opción que muestra el plano que contiene a las rectas L_1 y L_2, donde $\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.

A) $\overline{X} = \gamma(-1, -1, 0) + \delta(1, 10, -1) + (0, -3, -11)$
B) $\overline{X} = (-1, 10, -1) + \gamma(-1, -1, 0) + \delta(1, 1, 0)$
C) $\overline{X} = (-\gamma - \delta, -13\gamma - \delta + 3, -10\gamma + 11)$
D) $\overline{X} = \gamma(-1, -13, -10) + \delta(1, 1, 0) + (1, 10, -1)$

Respuesta: D)

Resolución
Comencemos por construir el plano en cuestión. Identificando que las dos rectas dadas son paralelas podemos tomar como direcciones del plano, por un lado, al vector director $(-1, -1, 0)$; y por otro, el vector que resulta ser al resta de los puntos de paso de cada recta $(0, -3, -11) - (1, 10, -1) = (-1, -13, -10)$. El punto de paso del plano puede ser cualquier punto de las rectas. Mirando entre las opciones, nos podemos dar cuenta que la opción D) es la que cumple lo pedido.
Otro camino de resolución, que además permite identificar que las demás opciones no son correctas, es obtener la ecuación implícita del plano construido y, posteriormente, analizar cuál de las opciones la cumple para todo valor de γ y δ. Estos contenidos los podés encontrar en las sesiones 2 y 3.

- Ejercicio 4 (1.25 pto.)

Sea la recta $L = \{(x, y) = \alpha(-2, 3) + (1, 0)$ con $\alpha \in \mathbb{R}\}$, y sea el punto $P = (1, -2)$. Indicá la única opción que muestra el punto simétrico de P respecto de la recta L.

A) $\left(\frac{37}{13}, -\frac{10}{3}\right)$
B) $(3, 0)$
C) $\left(\frac{25}{13}, -\frac{18}{13}\right)$
D) $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$

Respuesta: A)

Resolución
Una forma de resolver este ejercicio, consiste en identificar que el punto simétrico que buscamos se ubica en una recta ortogonal a L y que contiene al punto P. Recuperamos una estrategia ya estudiada: construimos una recta que sea ortogonal a L que pase por el punto P. Obtenemos entonces a la recta $(x, y) = \beta(3, 2) + (1, -2)$. La intersección de las dos rectas no es otra cosa que el punto medio entre P y su simétrico. En este caso nos queda que dicha intersección es el punto $R = \left(\frac{25}{13}, -\frac{18}{13}\right)$. Esto nos sirve para poder despejar el simétrico buscado pues, si Q es el simétrico de P respecto de L se cumple que: $\frac{P+Q}{2} = R$. Finalmente, podemos hallar que la opción correcta es la A). Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 3.

- Ejercicio 5 (1.25 pto.)
Considerá el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0\}$. Elegí la única afirmación que resulta verdadera.

A) El vector $(2, -2, 0, 1)$ pertenece al subespacio.
B) El conjunto $\langle(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$ es una base del subespacio S.
C) El conjunto $\langle(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (-1, -1, 1, 0)\rangle$ es un sistema de generadores.
D) La dimensión de S es cuatro.

Respuesta: B)

Resolución
Dado el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0\}$, nos piden elegir la opción correcta. A partir de esto tenemos que $-x_1 = x_2$. Con lo cual nos queda $(x_1, x_1, x_3, x_4) = x_1(1, -1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(0, 0, 0, 1)$, de aquí que el conjunto $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de S. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 6 (1.25 pto.)
Elegí la opción que muestra un posible valor de k para que el conjunto $\{(-1, 2, 1), (2, 1, -1), (1, 3, k)\}$ sea linealmente dependiente.

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1

Respuesta: C)

Resolución
A partir de $\{(-1, 2, 1), (2, 1, -1), (1, 3, k)\}$ tomando las dos primera coordenadas tenemos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 3 \end{cases}$. De donde obtenemos que $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. Usando esto en la tercer componente nos queda que $0 = 1 - 1 = 1 + 1 \cdot (-1) = k$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 4.

- Ejercicio 7 (1.25 pto.)
En la cónica $\frac{(x+8)^2}{k} + \frac{(y-6)^2}{45} = 1$ la excentricidad es $\frac{2}{3}$, si $k < 45$, seleccioná la opción que muestra la medida del semieje menor.

A) 25
B) 5
C) 30
D) 15

Respuesta: B)

Resolución
De la expresión canónica dada surge que la medida del semieje mayor a de la elipse es $\sqrt{45}$, teniendo en cuenta la fórmula de la excentricidad de la elipse y la relación entre parámetros surge que $k = 25$, y $b = 5$. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 5.

- Ejercicio 8 (1.25 pto.)
  Elegí la única opción que muestra las coordenadas de los focos de la cónica
  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 90y = 305$.

  A) $(-8; 5)$,$(2; 5)$
  B) $(-5; 0)$,$(5; 0)$
  C) $(0; 5)$,$(0; -5)$
  D) $(-3; -5)$,$(7; -5)$

  Respuesta: D)

  Resolución
  Con el procedimiento de completar cuadrados podemos escribir la ecuación de la hipérbola como $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+5)^2}{16} = 1$.Resulta ser una hipérbola de eje focal horizontal en $y = -5$. Teniendo en cuenta la relación entre los parámetros llegamos a que $c = 5$, por todo esto : la ordenada de los focos debe ser igual a -5 y la abscisa se obtiene de sumar en un caso, y restar en el otro, el valor de c a la abscisa del centro: 2. Estos contenidos los podés encontrar en la sesión 6.