Estática Comparativa

Alejandro Agustín Fernandez

a.a.fernandez@live.com.ar

13 de mayo de 2025

Índice

1. Introducción **3**

1.1. Primeras Palabras 3

1.2. La Noción de Equilibrio 3

1.2.1. Equilibrio vs Movimiento 3

1.2.2. El Concepto de Equilibrio 4

1.2.3. Equilibrios Estables e Inestables 4

1.2.4. Equilibrios Deseables y No Deseables 6

1.2.5. Existencia del Nuevo Equilibrio 7

1.2.6. Velocidad del Ajuste 8

1.2.7. Forma del Ajuste 8

1.3. Tipos de Variables 9

1.4. La cláusula "Ceteris Paribus" 10

2. Aspectos Matemáticos **10**

2.1. Una Variable Endógena y Una Variable Exógena 11

2.2. Una Variable Endógena y Dos Variables Exógenas 12

2.3. Una Variable Endógena y "**n**" Variable Exógenas 14

2.4. Dos Variables Endógenas y Una o Mas Variables Exógenas 14

2.5. Tres Variables Endógenas y Una o Mas Variables Exógenas 16

2.6. Generalización a "**m**" Variables Endógenas y "**n**" Variables Exógenas 18

2.7. Estática Comparativa en Ausencia de la Cláusula "Ceteris Paribus" 19

3. Modelo Keynesiano Simple **19**

3.1. Introducción al modelo 19

3.2. Un Ejercicio de Estática Comparativa Ajeno a Nuestra Materia 21

3.3. Estática Comparativa Formal 22

4. Un Modelo Simple de Oferta y Demanda **23**

4.1. Introducción al Modelo 23

4.2. Estática Comparativa 24

5. Modelo IS-LM **26**

6. Modelo WS-PS **26**

7. Ejercicios **26**

8. Respuestas Ejercicios **27**

1. Introducción

1.1. Primeras Palabras

Afortunadamente para nuestros propósitos, el título del tema que nos ocupa es bastante descriptivo.

Cuando hablamos de "Estática Comparativa" estamos comparando dos situaciones estáticas, es decir, dos equilibrios, uno inicial y uno final.

Entendamos esto, imaginemos que un objeto de la naturaleza, una situación política o social o el resultado de las conductas de las personas en un mercado económico dado (por citar solo algunos ejemplos) se encuentran en equilibrio en cierto momento inicial.

Asumamos luego que aparece alguna nueva fuerza (o se modifica una existente) que perturba este equilibrio inicial de manera que la situación previa deja de ser un equilibrio.

Si le creemos a Aristóteles[1], el estado natural de las cosas es el reposo, por lo que deberemos asumir que con el nuevo estado de fuerzas se arriba a un nuevo equilibrio.

La técnica de la estática comparativa justamente trata de encontrar este nuevo equilibrio y compararlo con la situación inicial.

El objetivo es predecir qué sucederá si ocurre tal otra cosa, que características tendrá el nuevo equilibrio. Por ejemplo, si el mercado de cierto bien está en equilibrio pero una fuerza externa lo perturba, ¿Qué sucederá con los precios? ¿Qué pasara con las cantidades vendidas?

De esto nos ocuparemos en este trabajo.

1.2. La Noción de Equilibrio

1.2.1. Equilibrio vs Movimiento

En la vida cotidiana solemos identificar el concepto de equilibrio con la ausencia de movimiento, con la quietud. Algo está en equilibrio si no se mueve.

Sin embargo, esta idea tan útil en nuestra cotidianeidad no se ve reflejada en las ciencias. Por ejemplo, en física[2] se considera que algo está en equilibrio no solo cuando no se mueve sino también cuando se mueve a velocidad constante.

Si nos centramos en la economía, que un mercado este en equilibrio no implica la ausencia de movimiento. Después de todo los consumidores y las empresas se "mueven" al comprar y vender bienes, al producirlos, al tomar decisiones económicas, etc.

Esta aparente contradicción entre equilibrio y movimiento se debe a que cuando hablamos de equilibrio nos referimos a un sistema y no a los elementos del mismo. El sistema "mercado" está en equilibrio, esta quieto, no los consumidores y oferentes.

Así, es mucho más preciso hablar de ausencia de cambio en las conductas que de ausencia de movimiento, es decir de quietud, en los agentes.

Por esto, necesitamos darle una definición precisa al concepto de equilibrio. Esto lo haremos en la siguiente sección.

[1] No lo hacemos, la filosofía, la física y la economía han avanzado mucho desde Aristóteles, pero de momento tomemos esta idea como valida.

[2] Al menos en la mecánica clásica.

1.2.2. El Concepto de Equilibrio

Para introducir el concepto de equilibrio tenemos dos caminos. El primero consiste en recurrir a algún paper o libro y buscar una definición formal. Así, podemos encontrar por ejemplo la siguiente cita[3]:

> *Un equilibrio es un conjunto de variables seleccionadas e interrelacionadas, tan ajustadas entre sí que ninguna tendencia inherente a cambiar prevalece en el modelo que constituyen.*

Sin desmenuzar la definición dada, podemos simplificarla en la idea de que un equilibrio es una situación que una vez alcanzada tiende a perpetuarse a menos que una nueva fuerza externa la perturbe.

Sin embargo, es preferible usar el segundo camino y adoptar una definición más apta para fines operativos.

A lo largo del trabajo diremos que un equilibrio se da cuando el valor de las variables internas del modelo no cambia[4]. Por razones obvias esto implica que no está actuando ninguna influencia que altere su valor[5].

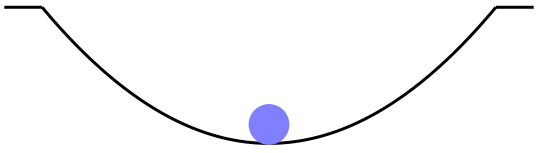
Esta definición es particularmente conveniente, si los valores de las variables en dos situaciones de equilibrio distintas están fijos, entonces podemos conocer cuanto valían en la situación inicial y en la final y comparar ambos números.

Por ejemplo, si en un modelo tenemos que el "producto bruto interno" y la "tasa de interés" resultan ser valores de equilibrio y se produce una perturbación que modifica dichos valores arribando de esta manera a un nuevo equilibrio, entonces podemos comparar la situación inicial y la final puesto que en ambas los valores del PBI y de la tasa de interés son conocidos.

1.2.3. Equilibrios Estables e Inestables

Equilibrios Estables

Imagine que ponemos una pelota de futbol en el medio de una pista de skate como en el siguiente diagrama:

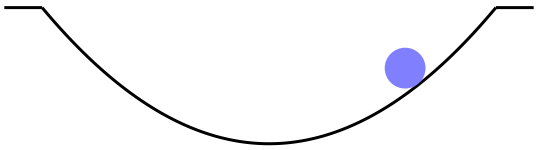


Ahora suponga que pateamos la pelota de manera que ruede hasta la siguiente posición:

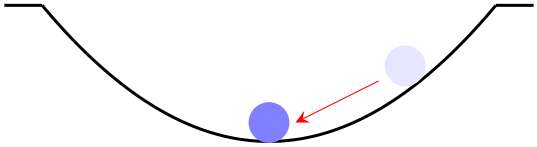
[3] Fritz Machlup, "Equilibrium and Disequilibrium: Misplaced Concreteness and Disguised Politics", en Economic Journal, marzo de 1958, pagina 9.

[4] Mas adelante veremos que a estas variables internas se las llama "Variables Endógenas".

[5] Del mismo modo que en la nota anterior, veremos que a estas influencias externas se las llama "Variables exógenas".



No hace falta mucho esfuerzo para notar que la pelota volverá "sola" al lugar en el que estaba antes de patearla:



Usamos la palabra "sola" entre comillas porque en realidad son la "fuerza de gravedad" y la "fuerza normal" las que están actuando de manera de restaurar el equilibrio previo. Es decir que la perturbación que implica patear la pelota se ve neutralizada por las fuerzas mencionadas de manera que se vuelve al equilibrio inicial.

Este tipo de situaciones ejemplifican lo que llamaremos equilibrios estables. Por mas que se los perturbe existen mecanismos que lo restauran.

Lógicamente esta idea tiene límites, si pateamos la pelota con tal violencia que la pelota se sale del perímetro de la pista de skate el equilibrio inicial no se recuperara.

Ahora pensemos en un ejemplo más ligado a la economía. Imagine que el mercado de cierto bien está en equilibrio, pero que este bien se importa cada 6 meses únicamente por barco debido a su tamaño y peso. Suponga que el barco encalla en su trayecto a destino por lo que la mercadería no llega a puerto.

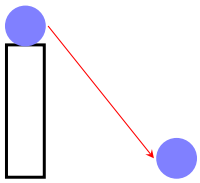
Resulta obvio que se producirá un desabastecimiento que hará aumentar los precios y disminuir las cantidades de equilibrio. Pero este accidente fortuito no altera los fundamentos del mercado, los costos de los oferentes y las preferencias de los consumidores seguirán siendo las mismas en un futuro. Dado esto, tarde o temprano se regularizará la situación y se volverá a los precios y cantidades de equilibrio iniciales. Es decir que, con respecto a una situación como la descripta, el equilibrio es estable.

Es claro que los equilibrios estables no son de interés para la estática comparativa. Esto es así puesto que la situación inicial y la final son la misma ya que la perturbación es transitoria y termina neutralizada.

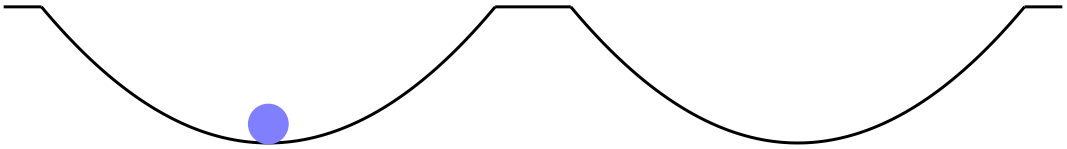
Equilibrios Inestables

En contraposición, para la estática comparativa importan los equilibrios inestables. Los mismos son aquellos equilibrios que cuando pierden su condición de tales no son restaurados y por ende se llega a un nuevo equilibrio distinto del anterior. La existencia de un equilibrio inicial y uno final diferentes permite la comparación e inviste de sentido a la estática comparativa.

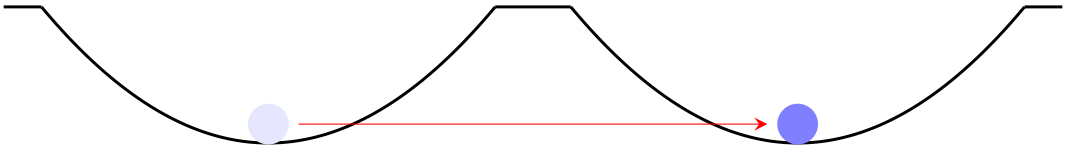
Por ejemplo, imagine una pelota en equilibrio apoyada sobre un pedestal. Si la misma se cae por una perturbación, no hay ninguna fuerza que la restaure a su lugar, una vez que cae al piso encuentra su nuevo equilibrio en el:



También podríamos proseguir con el ejemplo de la pista de skate y la pelota de futbol. Suponga que hay dos pistas, una a continuación de la otra:



Si pateamos la pelota con suficiente fuerza de manera que termina en la segunda pista, tendremos que encontrara su nuevo equilibrio en ella como se muestra en el siguiente diagrama:



De esta manera tenemos que, ante la perturbación ocurrida, el equilibrio inicial fue inestable.

En economía un ejemplo de equilibrio inestable se da en el mercado de bienes cuando el estado decide modificar la tasa impositiva promedio o el nivel de gasto público. Cuando esto sucede la perturbación modifica las cantidades de equilibrio a la baja en el caso de subida de impuestos y al alza en el caso de aumento del gasto. Y este nuevo equilibrio es permanente.

A lo largo de este trabajo siempre trabajaremos con equilibrios inestables.

1.2.4. Equilibrios Deseables y No Deseables

La existencia de equilibrio normalmente es percibida como algo positivo. Pero ya establecimos que el equilibrio implica una ausencia de cambio con respecto a una situación.

En ningún momento hemos dicho nada sobre las características de ese estado. Dicha situación podría perfectamente ser indeseable o incluso perjudicial.

Por ejemplo, algunos autores sostienen una interpretación sobre la teoría Keynesiana en la que puede haber equilibrio en el mercado de trabajo con altos niveles de desempleo. En esta visión existe equilibrio, pero el mismo conlleva una característica altamente perjudicial socialmente hablando.

La existencia de equilibrios indeseables potencia la importancia de la estática comparativa como una herramienta que nos sirve para intervenir y lograr cambiar un equilibrio indeseable por uno deseable[6].

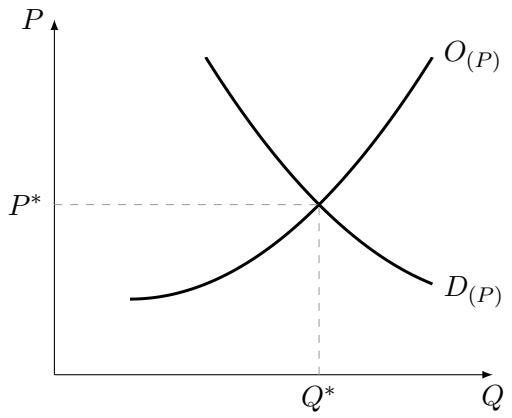
[6]Después de todo, las herramientas se crean para ser usadas y las ciencias existen para poder mejorar el mundo material en el que vivimos.

1.2.5. Existencia del Nuevo Equilibrio

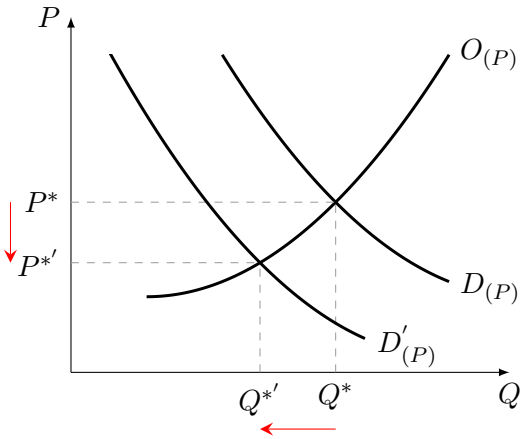
Hasta aquí hemos hablado constantemente de equilibrio inicial y final. Pero por mas que demos por buena la idea de que el mercado está en equilibrio en un inicio, no es seguro que una vez perturbado se arribe a un nuevo equilibrio.

Para que esto ocurra tiene que haber mecanismos de transmisión que nos hagan llegar al nuevo equilibrio y ausencia de rigideces que impidan el ajuste de las variables económicas.

Por ejemplo, es ampliamente conocida la idea de que los precios son inflexibles a la baja. Veamos esto gráficamente con un sencillo modelo de oferta y demanda que en un inicio está en equilibrio como se muestra a continuación:



Ahora suponga que hay un shock que mueve la curva de demanda hacia la izquierda:



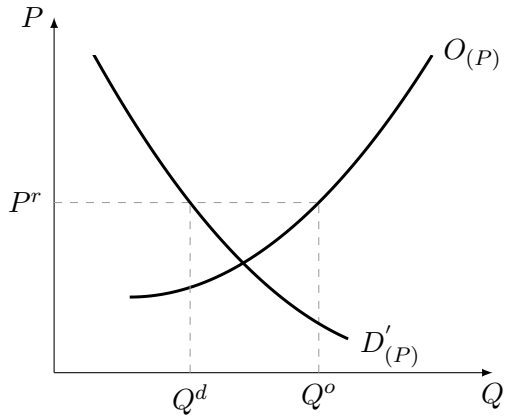
Como se observa en el gráfico, la cantidad intercambiada y el precio deben disminuir para alcanzar el nuevo equilibrio. Pero, ¿Que sucede si no hay un mecanismo de transmisión[7] que haga que los oferentes perciban el cambio de la demanda? o ¿Que ocurre si algún mecanismo psicológico, las expectativas o su estructura de costos lleva a los oferentes a no bajar los precios?

[7]En economía, un mecanismo de transmisión consiste en las señales que son percibidas por los agentes y que los llevan a variar su conducta.

En el ejemplo que dimos, tenemos que en condiciones normales el mecanismo por excelencia es la variación de los stocks. Cuando un oferente nota que su stock está aumentando, lo percibe como una señal de que la demanda ha modificado su comportamiento y esto lo lleva a una reacción que consiste en disminuir su producción.

Lógicamente estos mecanismos podrían estar ausentes o fallar por alguna circunstancia, y es a esto a lo que apunta la pregunta del cuerpo del texto.

La respuesta es que habrá un desequilibrio permanente y tendríamos una situación en la que a los precios vigentes se demanda menos de lo que los oferentes están intentando vender como se muestra en el siguiente grafico:



La cantidad de situaciones que se pueden dar en la realidad son innumerables y existe abundante literatura al respecto. Esta sección simplemente es un recordatorio de que la realidad no siempre se comporta como los modelos predicen por más sofisticados matemáticamente que estos sean.

En lo que a nosotros respecta, siempre supondremos que existen los mecanismos de transmisión y que no hay rigideces que impidan los ajustes. Dado esto, daremos por hecho que se alcanza un nuevo equilibrio.

1.2.6. Velocidad del Ajuste

Aun suponiendo que se alcanzara un nuevo equilibrio cuando una fuerza perturbe las condiciones iniciales, subyace la pregunta de qué tan rápido se alcanza dicho nuevo equilibrio.

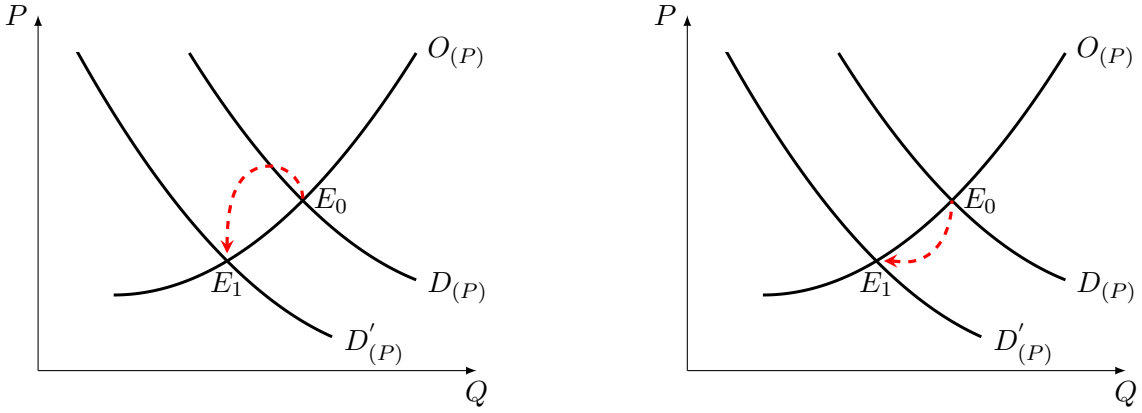
Expresando esta idea de otra forma, decimos que una vez afectado el equilibrio inicial, tenemos que analizar cuanto tiempo tardan en actuar los mecanismos de transmisión de manera de arribar a un nuevo equilibrio.

Esto no es trivial en economía. Por ejemplo, por mas que un mercado de trabajo alcance un nuevo equilibrio ante una perturbación, tenemos que contemplar el hecho de que quizá dicho equilibrio se alcance en periodos muy largos de tiempo. Si en el lapso intermedio los trabajadores sufren condiciones socialmente perjudiciales no podemos simplemente contentarnos con que eventualmente el equilibrio volverá a aparecer en el mercado.

Hecha la advertencia, en lo que respecta al presente escrito supondremos que los mercados ajustan de manera instantánea y dejaremos el levantamiento de este supuesto para cuando el lector deba aprender modelos dinámicos.

1.2.7. Forma del Ajuste

Muy ligado a lo anterior tenemos la temática de como ajustan los mercados. Observen los siguientes dos casos de estática comparativa en donde los equilibrios inicial y final son los mismos pero el recorrido que realizan las variables hasta alcanzar la situación final son distintos:



El caso del diagrama de la izquierda se corresponde con una situación en la que los oferentes fijan precio en base a su costo unitario. Cuando las unidades vendidas caen, su primer instinto es dividir su costo fijo por una cantidad menor de unidades vendidas lo que los lleva a aumentar los precios[8]. Lógicamente esto agrava el desequilibrio hasta que eventualmente a los oferentes no les queda mas remedio que disminuir los precios hasta alcanzar el nuevo equilibrio.

En el segundo diagrama lo que se observa es que los oferentes son aprensivos a la acumulación de stock lo que los lleva a bajar los precios y disminuir la producción. Sin embargo, no lo hacen en suficiente cuantía de manera de que coincidan con el nuevo equilibrio. Es decir que no logran visualizar de manera perfecta lo que está sucediendo en el mercado y por ende siguen acumulando stocks hasta que finalmente mediante sucesivos ajustes se arriba al nuevo equilibrio.

La trayectoria de los ajustes cuenta una historia sobre lo que está pasando en el mercado, sobre como funcionan los mecanismos de transmisión. Y si además el alcanzar el nuevo equilibrio lleva tiempos prolongados de tiempo[9] tenemos que dicha historia no es otra cosa que la realidad misma en las que viven las personas.

Tanto la cuestión de la "Velocidad del Ajuste" como la de la "Forma del Ajuste" entran en el terreno de los modelos dinámicos. En este trabajo lamentablemente deberemos prescindir de estos valiosos análisis.

1.3. Tipos de Variables

En los modelos que trabajemos siempre distinguiremos tres tipos de variables, las exógenas, las endógenas y los parámetros.

Las variables exógenas son aquellas que se determinan fuera del modelo que estamos analizando. Por ejemplo, en el contexto del modelo IS-LM, el gasto público lo determina el estado nacional de manera externa al modelo y por ende su valor no surge de una condición de equilibrio en el mismo[10].

En contraposición, las variables endógenas se determinan dentro del modelo como parte del proceso de equilibrio del mismo. En un modelo de oferta y demanda como los que hemos mostrado gráficamente en secciones anteriores tenemos que el precio y la cantidad son variables endógenas puesto que sus valores quedan fijados cuando el modelo está en equilibrio.

Por último, los parámetros son casos especiales de variables exógenas. Son exógenos en el sentido

[8] Gráficamente esto se observa en el hecho de que la línea punteada roja inicia su recorrido en dirección hacia arriba.
[9] O peor aún, las rigideces hacen que no se alcance.
[10] Note que la definición de variable exógena hace referencia a un modelo en específico. Así como el gasto público es exógeno en el modelo IS-LM, hay otros modelos más relacionados a las finanzas públicas o a las ciencias políticas donde no es exógeno puesto que sus niveles se determinan dentro del mismo modelo.

de que sus valores también vienen dados por fuera del modelo, pero tienen la característica particular de que a corto plazo están fijos y solo pueden cambiar con el transcurso del tiempo. Por ejemplo, la propensión marginal a consumir, es decir la proporción del ingreso que las personas destinan a consumo, depende de la cultura, de las costumbres de una población. Dado que la cultura no cambia a corto plazo, este parámetro estará fijo, se requerirían tiempos prolongados para que su valor se modifique.

1.4. La cláusula "Ceteris Paribus"

La expresión "Ceteris Paribus" que se usa en las ciencias tiene su origen en el latín. "Ceteris" significa "el resto, lo demás" y "Paribus" significa "igual". Su conjunción se traduciría como "Todo lo demás permanece constante" y esta es la acepción que utilizaremos.

Cuando decimos que se cumple la cláusula "Ceteris Paribus", lo que estamos expresando es que si se modifica una variable exógena no se modificara ninguna otra variable exógena.

Por ejemplo, cuando en el modelo IS-LM el estado cambia el nivel de gasto público tenemos que por la cláusula "Ceteris Paribus" no se modifica ninguna otra variable exógena como pueden ser los impuestos, el consumo autónomo o las exportaciones.

Observe que es una obviedad que la cláusula no impide que se modifiquen las variables endógenas. Esto es así ya que el cambio en la variable exógena lleva a un nuevo equilibrio que obligatoriamente implicara una modificación de las variables endógenas que se determinan en el equilibrio.

2. Aspectos Matemáticos

Desde la teoría, la estática comparativa consiste en encontrar como dependen funcionalmente las variables endógenas de las variables exógenas. Lo anterior equivale a decir que la estática comparativa trata de encontrar como se ven afectadas las variables de equilibrio (variables endógenas) cuando hay un shock (es decir una modificación en las variables exógenas) que las afecta.

Dicha relación funcional normalmente está definida a través de un sistema de ecuaciones implícitas[11].

Por ejemplo, si tenemos que las variables endógenas son la renta "y" y la tasa de interés "r" mientras que las variables exógenas son el gasto público "G" y el consumo autónomo "C_a" tendremos que el siguiente sistema de ecuaciones[12]:

$$\begin{cases} F(y, r, G, C_a) = 0 \\ H(y, r, G, C_a) = 0 \end{cases}$$

define como dependen "y" y "r" de "G" y "C_a":

$$\begin{aligned} y &= f(G, C_a) \\ r &= h(G, C_a) \end{aligned}$$

[11] El lector probablemente se pregunte porque complicarse con ecuaciones implícitas en vez de trabajar de manera más sencilla con ecuaciones explicitas. La respuesta es que la mayoría de las veces sucede que en los modelos económicos la forma funcional no permite una formulación explicita. También, y aún más importante, es que las mismas variables endógenas suelen aparecer en varias o en todas las ecuaciones de un modelo. Esto dificulta al extremo trabajar con funciones explicitas. Dado esto, aun en la remota posibilidad de que el modelo pueda ser reformulado para no tener que trabajarlo implícitamente, conviene unificar la forma de trabajo.

[12] Observe que en los modelos económicos a las variables endógenas se las suele simbolizar con minúsculas y a las variables exógenas mediante mayúsculas.

A su vez, las derivadas "$y_G^{'}$", "$y_{C_0}^{'}$", "$r_G^{'}$" y "$r_{C_0}^{'}$" darán cuenta de como las variaciones de las variables exógenas afectan a las variables endógenas.

Todo lo anterior requiere que se cumplan una serie de condiciones para que efectivamente las variables endógenas sean función de las exógenas. Las condiciones varían de acuerdo al caso particular que estemos trabajando (una, dos, tres, cuatro, etc variables endógenas, una, dos, tres, cuatro, etc variables exógenas) por lo que presentaremos las mismas en cada ocasión. Sin embargo, adelantamos que las mismas están muy relacionadas con el teorema de Cauchy-Dini.

Desde lo operativo tendremos que las herramientas practicas fundamentales que usaremos para llevar adelante el ejercicio de la estática comparativa son la diferenciación de funciones, las operaciones algebraicas y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales[13].

A continuación iremos presentando diferentes escenarios, cada uno de los cuales se adapta luego en la práctica a diferentes modelos económicos.

2.1. Una Variable Endógena y Una Variable Exógena

Llamemos "y" a una variable endógena y "x" a una variable exógena en cierto modelo genérico.

La relación funcional entre ellas se puede expresar, si se cumplen ciertas condiciones, de manera implícita. Así, tendremos que la relación entre estas dos variables vendrá dada por:

$$F(y;x) = 0$$

Si diferenciamos ambos miembros de la igualdad obtendremos:

$$F_y^{'}\, dy + F_x^{'}\, dx = 0$$

Y si reordenamos llegaremos a:

$$F_y^{'}\, dy = -F_x^{'}\, dx$$

Finalmente, reordenando nuevamente, tendremos que la expresión que da cuenta de como se ve afectada la variable endógena "y" (es decir "dy") cuando se modifica la variable exógena "x" (es decir "dx") viene dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x^{'}}{F_y^{'}}$$

Lo anterior no es otra cosa que la derivada, en este caso total, de "y" con respecto a "x", es decir "$y_x^{'}$"[14]:

$$y_x^{'} = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x^{'}}{F_y^{'}}$$

Esto significa que cuando aprendimos y calculábamos derivadas totales ya estamos realizando un ejercicio de estática comparativa. Esto es así puesto que como ya hemos mencionado, la estática comparativa consiste en hallar como varían las variables endógenas cuando se modifican las variables exógenas. Y esta situación es plenamente consistente con el concepto de derivada el cual relaciona como varia una variable dependiente cuando se modifica una variable independiente.

Si bien por conveniencia operativa siempre optaremos por diferenciar la ecuación del modelo, observe que el resultado anterior lo podríamos haber obtenido con el teorema de Cauchy-Dini para funciones que van de "$\mathbb{R}$" a "$\mathbb{R}$" el cual sostenía que:

[13] En particular se recomienda al lector dominar el uso de la "Regla de Cramer"

[14] Aquí hemos cometido un error de notación al utilizar la simbología de las derivadas parciales en una derivada total. Lo hemos hecho con el objetivo de reforzar la idea de que las variaciones de "x" afectan al valor de "y"

- En todo punto $(y_0; x_0)$ que satisfaga la ecuación $F(y; x) = 0$ y que tenga un entorno en donde la función "F" sea diferenciable hasta segundo grado, tendremos que se verificara que en dicho entorno "y" es una función de "x" $(y = f(x))$ y la derivada de "y" con respecto a "x" vendrá dada por la expresión $y_x^{'} = -\dfrac{F_x^{'}}{F_y^{'}}$ siendo que $F_y^{'}$ debe ser distinta de 0.

Es decir que el resultado previo obtenido por diferenciación no es otra cosa que la fórmula para calcular la derivada total de una función que va de "$\mathbb{R}$" a "$\mathbb{R}$" definida de manera implícita.

Desde ya, lo anterior implica que el ejercicio de estática comparativa será valido en tanto y en cuanto se verifiquen las hipótesis del teorema.

2.2. Una Variable Endógena y Dos Variables Exógenas

Ahora suponga que tenemos una variable endógena "y" y dos variables exógenas "x_1" y "x_2".

Bajo ciertas condiciones, "y" será una función de "x_1" y "x_2" $(y = f(x_1; x_2))$ y dicha función podrá ser expresada de manera implícita de la siguiente forma:

$$F(y; x_1; x_2) = 0$$

Si queremos hallar como se ve afectada "y" ante cambios en "x_1" o en "x_2" deberemos diferenciar a "F":

$$F_y^{'}\, dy + F_{x_1}^{'}\, dx_1 + F_{x_2}^{'}\, dx_2 = 0$$

Llegado este punto debemos bifurcar el desarrollo según cuál de las variables exógenas este variando.

- Si queremos calcular como se ve afectada "y" ante cambios en "x_1" deberemos recurrir a la cláusula "Ceteris Paribus" y sostener que el valor de "x_2" no se modifica y por ende se cumple que "$dx_2 = 0$". Así, la expresión anterior quedara:

$$F_y^{'}\, dy + F_{x_1}^{'}\, dx_1 + F_{x_2}^{'}\, 0 = 0$$

$$F_y^{'}\, dy + F_{x_1}^{'}\, dx_1 = 0$$

Reordenando obtendremos:

$$F_y^{'}\, dy = -F_{x_1}^{'}\, dx_1$$

$$\frac{dy}{dx_1} = -\frac{F_{x_1}^{'}}{F_y^{'}}$$

Que no es otra cosa que la expresión de la derivada parcial de "y" con respecto a "x_1", es decir "$y_{x_1}^{'}$"[15]:

$$y_{x_1}^{'} = \frac{dy}{dx_1} = -\frac{F_{x_1}^{'}}{F_y^{'}}$$

[15]Observe que en este caso no deberíamos usar la notación $\dfrac{dy}{dx_1}$ sino la más adecuada $\dfrac{\partial\, y}{\partial\, x_1}$. Sin embargo, optaremos por mantener la primera para enfatizar que el resultado se obtiene a partir de un proceso de diferenciación.

- Si en cambio queremos calcular como cambia "y" cuando se modifica "x_2" tendremos que por la cláusula "Ceteris Paribus" "x_1" no cambia por lo que se da que "$dx_1 = 0$". Así, la expresión del diferencial de "F" se reducirá a:

$$F_y^{'}\, dy + F_{x_1}^{'}\, 0 + F_{x_2}^{'}\, dx_1 = 0$$
$$F_y^{'}\, dy + F_{x_2}^{'}\, dx_2 = 0$$

Reordenando obtendremos:

$$F_y^{'}\, dy = -F_{x_2}^{'}\, dx_2$$
$$\frac{dy}{dx_2} = -\frac{F_{x_2}^{'}}{F_y^{'}}$$

Que nuevamente es la expresión de una derivada parcial, más específicamente la de "y" con respecto a "x_2", es decir "$y_{x_2}^{'}$"[16]:

$$y_{x_2}^{'} = \frac{dy}{dx_2} = -\frac{F_{x_2}^{'}}{F_y^{'}}$$

Estos dos resultados que dan cuenta de como se ve afectada la variable endógena cuando se mueven las variables exógenas:

$$y_{x_1}^{'} = -\frac{F_{x_1}^{'}}{F_y^{'}}$$
$$y_{x_2}^{'} = -\frac{F_{x_2}^{'}}{F_y^{'}}$$

refuerzan la idea de que las derivadas, en este caso parciales, son un tipo de estática comparativa.

Al igual que en la sección anterior tenemos que estos resultados, en vez de diferenciar "F" y aplicar la cláusula "Ceteris Paribus", podríamos haberlos obtenido a partir del teorema de Cauchy-Dini, solo que aplicado a funciones que van de "$\mathbb{R}^2$" a "$\mathbb{R}$". El mismo formula que:

- En todo punto $(z_0; x_0; y_0)$ que satisfaga la ecuación $F(z; x; y) = 0$ y que tenga un entorno en donde $F_z^{'}$, $F_x^{'}$ y $F_y^{'}$ existan y sean continuas, tendremos que se verificara que en dicho entorno "z" es una función de "x" y de "y"$(z = f(x; y))$ y que las derivadas de "z" con respecto a "x" y con respecto a "y' vendrán dadas por las expresiones $z_x^{'} = -\frac{F_x^{'}}{F_z^{'}}$ y $z_y^{'} = -\frac{F_y^{'}}{F_z^{'}}$ siendo que $F_z^{'}$ debe ser distinta de 0.

Como observamos, los resultados de la estática comparativa con dos variables exógenas y una endógena son exactamente iguales a los de las fórmulas de derivación implícita para funciones que van de "$\mathbb{R}^2$" a "$\mathbb{R}$" y por ende se deben cumplir las hipótesis del teorema independientemente de que método elijamos.

[16] Al igual que en la nota anterior no deberíamos usar $\frac{dy}{dx_2}$ sino $\frac{\partial\, y}{\partial\, x_2}$. Por razones pedagógicas nos seguiremos tomando dicha licencia.

2.3. Una Variable Endógena y "n" Variable Exógenas

Los resultados de las dos secciones precedentes pueden ser generalizados a cuando tenemos "n" variables exógenas:

$$F(y; x_1; x_2; ...; x_n) = 0$$

Si diferenciamos esta función tendremos que:

$$F_y^{'}\, dy + F_{x_1}^{'}\, dx_1 + F_{x_2}^{'}\, dx_2 + ... + F_{x_n}^{'}\, dx_n = 0$$

Y si aplicamos la cláusula "Ceteris Paribus" sucesivamente obtendremos las derivadas:

$$\begin{aligned} y_{x_1}^{'} &= -\frac{F_{x_1}^{'}}{F_y^{'}} \\ y_{x_2}^{'} &= -\frac{F_{x_2}^{'}}{F_y^{'}} \\ &\vdots \\ y_{x_n}^{'} &= -\frac{F_{x_n}^{'}}{F_y^{'}} \end{aligned}$$

cada una de las cuales da cuenta de como se modifica la variable endógena cuando varia la variable exógena respectiva.

Lógicamente lo anterior solo será valido cuando se cumpla el teorema de Cauchy-Dini para funciones que van de "$\mathbb{R}^n$" a "$\mathbb{R}$".

2.4. Dos Variables Endógenas y Una o Mas Variables Exógenas

Denominemos "y_1" e "y_2" a dos variables endógenas y "x_1", "x_2", ... , "x_n" a las variables exógenas.

Para que los cambios en las variables endógenas cuando se modifica una variable exógena sean únicos, es decir para que el sistema sea compatible determinado, necesitamos que haya dos ecuaciones linealmente independientes en el modelo.

Así, la relación funcional entre las variables endógenas y exógenas vendrá dada por el siguiente sistema de ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} F(y_1, y_2, x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ G(y_1, y_2, x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Lo anterior será válido en tanto y en cuanto en un entorno de un punto que cumpla el sistema de ecuaciones se verifique que existen y son continuas las derivadas "$F_{y_1}^{'}$", "$F_{y_2}^{'}$", "$F_{x_1}^{'}$", "$F_{x_2}^{'}$", ... , "$F_{x_n}^{'}$", "$G_{y_1}^{'}$", , "$G_{y_2}^{'}$", "$G_{x_1}^{'}$", "$G_{x_2}^{'}$", ... , "$G_{x_n}^{'}$" y que el determinante jacobiano $\begin{vmatrix} F_{y_1}^{'} & F_{y_2}^{'} \\ G_{y_1}^{'} & G_{y_2}^{'} \end{vmatrix}$ es distinto de 0.

Si esto sucede tendremos que el sistema de ecuaciones define como dependen "y_1" e "y_2" de las variables exógenas"x_1", "x_2", ... , "x_n":

$$y_1 = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$y_2 = g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Y tendremos que las expresiones "$y_{1_{x_1}}'$", "$y_{2_{x_1}}'$", "$y_{1_{x_2}}'$", "$y_{2_{x_2}}'$", ... , "$y_{1_{x_n}}'$", "$y_{2_{x_n}}'$" dan cuenta de como varían las variables endógenas cuando se modifican las exógenas.

Para hallar estas derivadas debemos diferenciar el sistema:

$$\begin{cases} F'_{y_1}\,dy_1 + F'_{y_2}\,dy_2 + F'_{x_1}\,dx_1 + F'_{x_2}\,dx_2 + ... + F'_{x_n}\,dx_n = 0 \\ G'_{y_1}\,dy_1 + G'_{y_2}\,dy_2 + G'_{x_1}\,dx_1 + G'_{x_2}\,dx_2 + ... + G'_{x_n}\,dx_n = 0 \end{cases}$$

Según que derivadas estemos tratando de calcular deberemos aplicar la cláusula "Ceteris Paribus" adecuada.

Por ejemplo, si queremos calcular las derivadas "$y_{1_{x_1}}'$", "$y_{2_{x_1}}'$" tendremos que postular que "x_2", "x_3", ... , "x_n" permanecen constantes y por ende se cumple que "$dx_2 = 0$", "$dx_3 = 0$", ... , "$dx_n = 0$".

Así, el sistema de ecuaciones precedente se verá reducido a:

$$\begin{cases} F'_{y_1}\,dy_1 + F'_{y_2}\,dy_2 + F'_{x_1}\,dx_1 = 0 \\ G'_{y_1}\,dy_1 + G'_{y_2}\,dy_2 + G'_{x_1}\,dx_1 = 0 \end{cases}$$

Si dividimos todos los términos de ambas ecuaciones por "dx_1" llegaremos a que:

$$\begin{cases} F'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} + F'_{y_2}\,\dfrac{dy_2}{dx_1} + F'_{x_1}\,\dfrac{dx_1}{dx_1} = \dfrac{0}{dx_1} \\ G'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} + G'_{y_2}\,\dfrac{dy_y}{dx_1} + G'_{x_1}\,\dfrac{dx_1}{dx_1} = \dfrac{0}{dx_1} \end{cases}$$

Simplificando y reordenando nos quedara que:

$$\begin{cases} F'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} + F'_{y_2}\,\dfrac{dy_2}{dx_1} = -F'_{x_1} \\ G'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} + G'_{y_2}\,\dfrac{dy_y}{dx_1} = -G'_{x_1} \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas ("$y_{1_{x_1}}' = \dfrac{dy_1}{dx_1}$" e "$y_{2_{x_1}}' = \dfrac{dy_2}{dx_1}$"), por lo que podemos aplicar cualquier método de resolución como ser sustitución, igualación, Gauss, Gauss-Jordan, etc.

En particular nosotros optaremos por la "Regla de Cramer" por lo que para hallar como se ven afectadas las variables endógenas cuando varia la variable exógena "x_1" tendremos que plantear:

$$y_{1_{x_1}}' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\begin{vmatrix} -F'_{x_1} & F'_{y_2} \\ -G'_{x_1} & G'_{y_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} \end{vmatrix}} \qquad y_{2_{x_1}}' = \frac{dy_2}{dx_1} = \frac{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & -F'_{x_1} \\ G'_{y_1} & -G'_{x_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} \end{vmatrix}}$$

El procedimiento para hallar las derivadas de las variables endógenas con respecto al resto de las variables exógenas es exactamente el mismo, solo deberemos aplicar la cláusula "Ceteris Paribus" respectiva y operar y resolver el sistema de ecuaciones resultante.

Para reforzar, si queremos calcular "$y_{1x_2}^{'}$", "$y_{2x_2}^{'}$" tendremos que la cláusula implica que "$dx_1 = 0$", "$dx_3 = 0$", ... , "$dx_n = 0$" por lo que el sistema de ecuaciones quedara:

$$\begin{cases} F_{y_1}^{'}\, dy_1 & + & F_{y_2}^{'}\, dy_2 & + & F_{x_2}^{'}\, dx_2 = 0 \\ G_{y_1}^{'}\, dy_1 & + & G_{y_2}^{'}\, dy_2 & + & G_{x_2}^{'}\, dx_2 = 0 \end{cases}$$

Y al reordenar y aplicar Cramer llegaremos a:

$$y_{1x_2}^{'} = \frac{dy_1}{dx_2} = \frac{\begin{vmatrix} -F_{x_2}^{'} & F_{y_2}^{'} \\ -G_{x_2}^{'} & G_{y_2}^{'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{y_1}^{'} & F_{y_2}^{'} \\ G_{y_1}^{'} & G_{y_2}^{'} \end{vmatrix}} \qquad y_{2x_2}^{'} = \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{\begin{vmatrix} F_{y_1}^{'} & -F_{x_2}^{'} \\ G_{y_1}^{'} & -G_{x_2}^{'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{y_1}^{'} & F_{y_2}^{'} \\ G_{y_1}^{'} & G_{y_2}^{'} \end{vmatrix}}$$

En general, las expresiones que nos darán el valor de las derivadas con respecto a la variable exógena "x_i" con $i = 1, 2, ..., n$ serán:

$$y_{1x_i}^{'} = \frac{dy_1}{dx_i} = \frac{\begin{vmatrix} -F_{x_i}^{'} & F_{y_2}^{'} \\ -G_{x_i}^{'} & G_{y_2}^{'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{y_1}^{'} & F_{y_2}^{'} \\ G_{y_1}^{'} & G_{y_2}^{'} \end{vmatrix}} \qquad y_{2x_i}^{'} = \frac{dy_2}{dx_i} = \frac{\begin{vmatrix} F_{y_1}^{'} & -F_{x_i}^{'} \\ G_{y_1}^{'} & -G_{x_i}^{'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{y_1}^{'} & F_{y_2}^{'} \\ G_{y_1}^{'} & G_{y_2}^{'} \end{vmatrix}}$$

2.5. Tres Variables Endógenas y Una o Mas Variables Exógenas

De manera similar a la sección anterior, tendremos que si tenemos tres variables endógenas necesitaremos tres ecuaciones linealmente independientes para poder encontrar una relación funcional.

Si llamamos"y_1", "y_2" e "y_3" a las variables endógenas y "x_1", "x_2", ... , "x_n" a las variables exógenas y si se cumplen ciertas condiciones tendremos que la relación entre las variables vendrá dada por el sistema implícito:

$$\begin{cases} F(y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ G(y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ H(y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Las condiciones antedichas serán que dado un punto que satisfaga el sistema de ecuaciones necesitaremos que en un entorno de él existan y sean continuas las derivadas:

$$F_{y_1}^{'},\ F_{y_2}^{'},\ F_{y_3}^{'},\ F_{x_1}^{'},\ F_{x_2}^{'},\ ...\ ,\ F_{x_n}^{'},$$
$$G_{y_1}^{'},\ G_{y_2}^{'},\ G_{y_3}^{'},\ G_{x_1}^{'},\ G_{x_2}^{'},\ ...\ ,\ G_{x_n}^{'},$$
$$H_{y_1}^{'},\ H_{y_2}^{'},\ H_{y_3}^{'},\ H_{x_1}^{'},\ H_{x_2}^{'},\ ...\ ,\ H_{x_n}^{'}$$

Además necesitamos que el determinante jacobiano $\begin{vmatrix} F_{y_1}^{'} & F_{y_2}^{'} & F_{y_3}^{'} \\ G_{y_1}^{'} & G_{y_2}^{'} & G_{y_3}^{'} \\ H_{y_1}^{'} & H_{y_2}^{'} & H_{y_3}^{'} \end{vmatrix}$ sea distinto de 0.

Verificado lo anterior, tendremos que el sistema de ecuaciones implícitas define como dependen "y_1", "y_2" e "y_3" de las variables exógenas"x_1", "x_2", ... , "x_n":

$$y_1 = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$y_2 = g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$y_3 = h(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Nuevamente, las derivadas "$y_{1_{x_1}}'$", "$y_{2_{x_1}}'$", "$y_{3_{x_1}}'$", "$y_{1_{x_2}}'$", "$y_{2_{x_2}}'$", "$y_{3_{x_2}}'$", ... , "$y_{1_{x_n}}'$", "$y_{2_{x_n}}'$", "$y_{3_{x_n}}'$" nos darán como información como varían las variables endógenas cuando se modifican las exógenas.

Para hallar los valores de estas, debemos diferenciar el sistema:

$$\begin{cases} F'_{y_1}\,dy_1 & +F'_{y_2}\,dy_2 & +F'_{y_3}\,dy_3 & +F'_{x_1}\,dx_1 & +F'_{x_2}\,dx_2 & +...+ & F'_{x_n}\,dx_n = 0 \\ G'_{y_1}\,dy_1 & +G'_{y_2}\,dy_2 & +G'_{y_3}\,dy_3 & +G'_{x_1}\,dx_1 & +G'_{x_2}\,dx_2 & +...+ & G'_{x_n}\,dx_n = 0 \\ H'_{y_1}\,dy_1 & +H'_{y_2}\,dy_2 & +H'_{y_3}\,dy_3 & +H'_{x_1}\,dx_1 & +H'_{x_2}\,dx_2 & +...+ & H'_{x_n}\,dx_n = 0 \end{cases}$$

Y utilizar la cláusula "Ceteris Paribus" según cual de las variables exógenas este variando mientras que las demás permanecen constantes.

A modo de ejemplo suponga que la variable que se altera es "x_1" por lo que se cumplirá que "$dx_2 = 0$", "$dx_3 = 0$", ... , "$dx_n = 0$". Así, el sistema nos quedara:

$$\begin{cases} F'_{y_1}\,dy_1 & +F'_{y_2}\,dy_2 & +F'_{y_3}\,dy_3 & +F'_{x_1}\,dx_1 = 0 \\ G'_{y_1}\,dy_1 & +G'_{y_2}\,dy_2 & +G'_{y_3}\,dy_3 & +G'_{x_1}\,dx_1 = 0 \\ H'_{y_1}\,dy_1 & +H'_{y_2}\,dy_2 & +H'_{y_3}\,dy_3 & +H'_{x_1}\,dx_1 = 0 \end{cases}$$

Dividiendo todos los términos por "$dx_1 = 0$" llegaremos a:

$$\begin{cases} F'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} & +F'_{y_2}\,\dfrac{dy_2}{dx_1} & +F'_{y_3}\,\dfrac{dy_3}{dx_1} & +F'_{x_1}\,\dfrac{dx_1}{dx_1} = \dfrac{0}{dx_1} \\ G'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} & +G'_{y_2}\,\dfrac{dy_2}{dx_1} & +G'_{y_3}\,\dfrac{dy_3}{dx_1} & +G'_{x_1}\,\dfrac{dx_1}{dx_1} = \dfrac{0}{dx_1} \\ H'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} & +H'_{y_2}\,\dfrac{dy_2}{dx_1} & +H'_{y_3}\,\dfrac{dy_3}{dx_1} & +H'_{x_1}\,\dfrac{dx_1}{dx_1} = \dfrac{0}{dx_1} \end{cases}$$

Simplificando y reordenando obtenemos el sistema definitivo:

$$\begin{cases} F'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} & +F'_{y_2}\,\dfrac{dy_2}{dx_1} & +F'_{y_3}\,\dfrac{dy_3}{dx_1} & = -F'_{x_1} \\ G'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} & +G'_{y_2}\,\dfrac{dy_2}{dx_1} & +G'_{y_3}\,\dfrac{dy_3}{dx_1} & = -G'_{x_1} \\ H'_{y_1}\,\dfrac{dy_1}{dx_1} & +H'_{y_2}\,\dfrac{dy_2}{dx_1} & +H'_{y_3}\,\dfrac{dy_3}{dx_1} & = -H'_{x_1} \end{cases}$$

Si a este sistema de ecuaciones le aplicamos la "Regla de Cramer" para hallar las incógnitas "$y_{1_{x_1}}' = \dfrac{dy_1}{dx_1}$", "$y_{2_{x_1}}' = \dfrac{dy_2}{dx_1}$" y "$y_{3_{x_1}}' = \dfrac{dy_3}{dx_1}$" veremos que las variaciones de las variables endógenas cuando se modifica "x_1" tendrán los siguientes valores:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\begin{vmatrix} -F'_{x_1} & F'_{y_2} & F'_{y_3} \\ -G'_{x_1} & G'_{y_2} & G'_{y_3} \\ -H'_{x_1} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} & F'_{y_3} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} & G'_{y_3} \\ H'_{y_1} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix}} \qquad \frac{dy_2}{dx_1} = \frac{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & -F'_{x_1} & F'_{y_3} \\ G'_{y_1} & -G'_{x_1} & G'_{y_3} \\ H'_{y_1} & -H'_{x_1} & H'_{y_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} & F'_{y_3} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} & G'_{y_3} \\ H'_{y_1} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix}} \qquad \frac{dy_3}{dx_1} = \frac{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} & -F'_{x_1} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} & -G'_{x_1} \\ H'_{y_1} & H'_{y_2} & -H'_{x_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} & F'_{y_3} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} & G'_{y_3} \\ H'_{y_1} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix}}$$

El cálculo de las demás derivadas sigue exactamente la misma operatividad, lo único que cambia es cuales son los diferenciales que se hacen 0 de acuerdo a la cláusula "Ceteris Paribus".

Por mera muestra, las expresiones genéricas que nos dicen el valor de las derivadas de las variables endógenas con respecto a la variable exógena "x_i" serán:

$$\frac{dy_1}{dx_i} = \frac{\begin{vmatrix} -F'_{x_i} & F'_{y_2} & F'_{y_3} \\ -G'_{x_i} & G'_{y_2} & G'_{y_3} \\ -H'_{x_i} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} & F'_{y_3} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} & G'_{y_3} \\ H'_{y_1} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix}} \qquad \frac{dy_2}{dx_i} = \frac{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & -F'_{x_i} & F'_{y_3} \\ G'_{y_1} & -G'_{x_i} & G'_{y_3} \\ H'_{y_1} & -H'_{x_i} & H'_{y_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} & F'_{y_3} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} & G'_{y_3} \\ H'_{y_1} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix}} \qquad \frac{dy_3}{dx_i} = \frac{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} & -F'_{x_i} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} & -G'_{x_i} \\ H'_{y_1} & H'_{y_2} & -H'_{x_i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_{y_1} & F'_{y_2} & F'_{y_3} \\ G'_{y_1} & G'_{y_2} & G'_{y_3} \\ H'_{y_1} & H'_{y_2} & H'_{y_3} \end{vmatrix}}$$

con $i = 1, 2, ..., n$.

2.6. Generalización a "m" Variables Endógenas y "n" Variables Exógenas

Siguiendo las lógicas de las anteriores secciones no hay mayor dificultad en generalizar los resultados a "m" variables endógenas.

Tendremos el sistema de ecuaciones implícitas compuesto por "m" ecuaciones:

$$\begin{cases} F_1(y_1, y_2, ..., y_m, x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ F_2(y_1, y_2, ..., y_m, x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(y_1, y_2, ..., y_m, x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

El cual deberemos diferenciar, contemplarle la cláusula "Ceteris Paribus" respectiva, reordenarlo y aplicarle la "Regla de Cramer" como en las dos últimas secciones.

Los determinantes de la regla serán de "$m \times m$" lo que probablemente nos lleve a recurrir a una computadora para su cálculo. Sin embargo, las lógicas involucradas son las mismas que en los casos más sencillos que hemos planteado.

Es reconfortante saber que, a pesar de que existen modelos económicos con más de 300 ecuaciones, si tuviéramos suficiente tiempo podríamos resolverlos a mano con un lápiz y un papel.

A modo anecdótico, mostramos como sería el valor de la derivada "$y_{1_{x_1}}^{'} = \dfrac{dy_1}{dx_1}$" en un modelo con "$m$" variables exógenas:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\begin{vmatrix} -F_{1_{x_1}}^{'} & F_{1_{y_2}}^{'} & ... & F_{1_{y_m}}^{'} \\ -F_{2_{x_1}}^{'} & F_{2_{y_2}}^{'} & ... & F_{2_{y_m}}^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_{m_{x_1}}^{'} & F_{m_{y_2}}^{'} & ... & F_{m_{y_m}}^{'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_{1_{y_1}}^{'} & F_{1_{y_2}}^{'} & ... & F_{1_{y_m}}^{'} \\ F_{2_{y_1}}^{'} & F_{2_{y_2}}^{'} & ... & F_{2_{y_m}}^{'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m_{y_1}}^{'} & F_{m_{y_2}}^{'} & ... & F_{m_{y_m}}^{'} \end{vmatrix}}$$

2.7. Estática Comparativa en Ausencia de la Cláusula "Ceteris Paribus"

3. Modelo Keynesiano Simple

3.1. Introducción al modelo

El Modelo Keynesiano Simple[17] parte de que la demanda agregada, es decir la cantidad total de bienes que se demandan en una economía, debe ser igual a la producción:

$$y = DA$$

Pero hace dos supuestos sobre como se comporta dicha producción. El primero es que los precios de los bienes ofrecidos están fijos, y el segundo es que, a los precios dados, las empresas están dispuestas a vender cualquier cantidad de producción que se les demande.

Lo anterior significa que las empresas simplemente ajustan sus niveles de producción para que coincidan con la demanda agregada mediante el mecanismo de detectar si sus inventarios están variando[18].

Con estos supuestos, tendremos una curva de oferta totalmente plana. Así, el equilibrio en el modelo no será a causa de la intersección entre la oferta y la demanda, sino que surgirá a partir de cuales sean, y como afecten, los factores que determinan la demanda agregada.

Esto es típico de economías donde la capacidad instalada está sub-utilizada, se experimentan tasas de desempleo elevadas y no hay inflación. Si recuerda de sus libros de historia, lo anterior se adapta bastante bien a las economías de los países centrales durante la gran depresión.

Si lo que importa es lo que determine la demanda agregada, tendremos que desglosarla para analizarla en detalle. La primer "apertura" que haremos será según que sector es el que realiza dicha

[17] Simplificado en muchas ocasiones como "MKS".

[18] Si los inventarios están creciendo eso significa que la demanda está por debajo de lo que se está produciendo por lo que deben disminuir la producción. Al revés, si los stocks están bajando deben aumentarla para igualar a la demanda agregada.

demanda de bienes y que uso hará de ellos.

Así, esta puede destinarse a consumo por parte de las familias ("C"), para inversión de las empresas ("I"), a gasto del estado ("G") o ser una demanda realizada por el resto del mundo ("$X - M$")[19]:

$$y = C + I + G + X - M$$

El segundo nivel de "escrutinio" será establecer teorías sobre como se comporta alguno de estos componentes de la demanda.

Centremosnos en el consumo, dado que lo recaudado por la venta de la producción se usa para retribuir a los factores[20], tendremos que un aumento de la producción implica que los ingresos de los trabajadores (y también de los capitalistas) aumentaran. Esto los llevara a incrementar sus niveles de consumo.

Si llamamos "C_0" a una parte del consumo que no depende del ingreso, es decir a un consumo autónomo, y "c" a la proporción[21] del ingreso que los consumidores destinan a consumo, es decir a la propensión marginal a consumir, tendremos que el consumo se comportara según la siguiente ecuación:

$$C = C_0 + c\, y$$

Podríamos seguir postulando teorías sobre el resto de los componentes. Por ejemplo, existe una variación "más keynesiana aun" del MKS llamada "MKS con Aceleración de la Inversión" en donde se teoriza que la inversión también depende del ingreso, otra con "Aceleración de las Importaciones" más apropiada para economías abiertas, etc[22]. Sin embargo, para los fines que perseguimos, nos alcanzara con suponer que la inversión, el gasto público y la demanda neta del resto del mundo son variables exógenas.

Así, el equilibrio en el mercado vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$y = C_0 + c\, y + I + G + X - M$$

donde tenemos una variable endógena (la producción "y"), y cuatro variables exógenas (el consumo autónomo "C_0", la inversión "I", el gasto público "G" y la demanda del resto del mundo "$X - M$").

Si por parsimonia agrupamos todas las variables exógenas de manera de consolidar un gasto autónomo del ingreso que llamaremos "A_0", tendremos que la ecuación nos quedara:

$$y = A_0 + c\, y$$

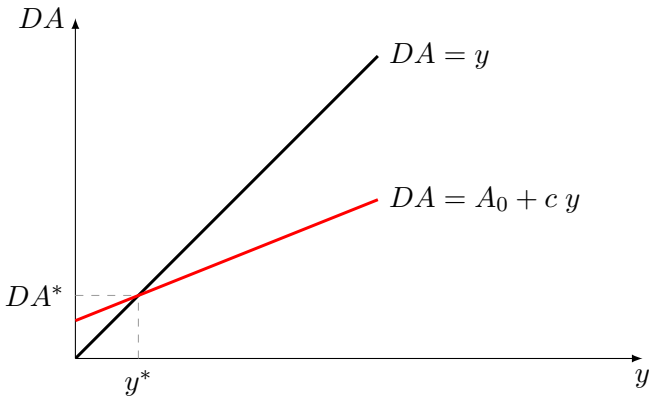
Veamos gráficamente como nos queda el modelo:

[19] Aquí, al restar las exportaciones y las importaciones, estamos considerando una demanda neta por parte del resto del mundo.

[20] Fundamentalmente "trabajo" y "capital" en este modelo.

[21] Note que por definición, el valor de una proporción está entre 0 y 1.

[22] Cuando veamos modelo IS-LM ahondaremos en estos conceptos.



En el gráfico tenemos una recta bisectriz a el primer cuadrante que representa todos aquellos puntos en los que la demanda agregada y la producción son iguales. Esto sabemos que siempre se verificara en el modelo por los supuestos que hemos hecho sobre como se comporta la oferta.

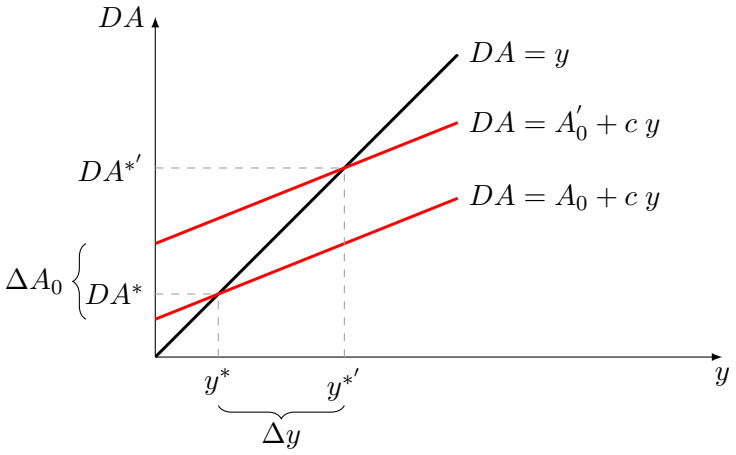
La recta roja representa la forma funcional de la demanda agregada siendo que la ordenada al origen es el gasto autónomo "A_0" y que la pendiente viene dada por la propensión marginal a consumir "c".

El equilibrio en el modelo se logra en el punto en donde se intersecan ambas rectas. Este equilibrio viene determinado únicamente por la forma que tome la función de demanda agregada ya que la oferta simplemente responde a ella.

3.2. Un Ejercicio de Estática Comparativa Ajeno a Nuestra Materia

Cualquier modificación del gasto autónomo desplaza verticalmente la demanda agregada. Por ejemplo, si el estado decide incrementar su gasto[23], tendremos que la demanda agregada se mueve hacia arriba lo que a su vez lleva a las empresas a aumentar la producción.

Esto puede verse gráficamente de la siguiente manera:



Si observa el grafico, notara que la variación de la producción "Δy" es mayor que la variación del gasto autónomo "ΔA_0". Lo que está sucediendo aquí es que el aumento del gasto está incrementando la producción por encima de lo que el mismo gasto demanda.

[23]Damos como ejemplo al gasto público como muestra de un aumento del gasto autónomo ya que suele ser el único de los componentes de la demanda que puede ser determinado de manera centralizada por el poder político.

La causa de esto es que a la mejora inicial de la producción para satisfacer el aumento del gasto autónomo, le sigue un aumento del consumo por la mayor retribución a los factores, lo que a su vez vuelve a generar un aumento de la producción, lo que nuevamente incrementa el consumo y así sucesivamente.

Este proceso de aumento del ingreso se da secuencialmente al infinito. Suponga que la propensión marginal a consumir es "$0,8$". Si el gasto autónomo aumenta un "\$1", el aumento de la producción será:

$$\Delta y = 1 + 1 \,.\, 0,8 + 1 \,.\, 0,8 \,.\, 0,8 + 1 \,.\, 0,8 \,.\, 0,8 \,.\, 0,8 + ...$$

En términos de sumatoria podemos expresar lo anterior como:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{\infty} 1 \,.\, 0,8^{i-1}$$

Que es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica con razón entre 0 y 1. Si recuerda de su curso de "Análisis Matemático 1", el valor converge a:

$$\Delta y = 1 \,.\, \frac{1}{1 - 0,8} = \frac{1}{0,2} = 5$$

Es decir que, en nuestro ejemplo, un aumento de 1 peso en el gasto autónomo genera un aumento en la producción de 5 pesos. A esto, en economía, se lo denomina multiplicador keynesiano del gasto.

Las fórmulas anteriores pueden generalizarse de la siguiente manera:

$$\Delta y = \Delta A_0 + \Delta A_0 \,.\, c + \Delta A_0 \,.\, c \,.\, c + \Delta A_0 \,.\, c \,.\, c \,.\, c + ...$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta A_0 \,.\, c^{i-1} = \Delta A_0 \sum_{i=1}^{\infty} \,.\, c^{i-1}$$

$$\Delta y = \Delta A_0 \,.\, \frac{1}{1 - c}$$

Esto que hemos hecho aquí no es otra cosa que un ejercicio de estática comparativa. Después de todo lo único que realizamos es determinar como se ve afectada la variable endógena "y" cuando se modifica la variable exógena "A_0". Primero lo mostramos mediante un método gráfico y luego a través progresiones geométricas.

3.3. Estática Comparativa Formal

De la sección previa habrá notado que la diferenciación de ecuaciones implícitas no es la única forma de realizar estática comparativa en este modelo. Sin embargo, seguramente también noto que el método grafico no es numéricamente exacto y que el método de las progresiones geométricas no suele ser el más operativo.

Por ello recurramos a los métodos de la sección 2. En el modelo hemos visto que tenemos una sola variable endógena y que hemos agrupado todas las variables exógenas en una sola.

Así, lo único que deberemos hacer es tomar la ecuación de equilibrio del modelo:

$$y = A_0 + c\, y$$

Diferenciarla:

$$dy = dA_0 + c\, dy$$

Reordenarla:

$$dy - c\,dy = dA_0$$

Hacer factor común "dy":

$$dy\,(1-c) = dA_0$$

Y finalmente reordenarla nuevamente:

$$\frac{dy}{dA_0} = \frac{1}{(1-c)}$$

Esta expresión da cuenta de como se ve afectada la producción de equilibrio ante un cambio en cualquiera de los componentes autónomos del modelo.

Observe que el resultado es el mismo que en la sección anterior y que dado que "c" toma valores entre "0" y "1" el resultado del multiplicador keynesiano del gasto será mayor a 1:

$$\frac{dy}{dA_0} = \frac{1}{(1-c)} > 1$$

Por último, recuerde que la agregación de los diferentes gastos autónomos se hizo por una mera simplificación matemática. Si no quisiéramos hacerla, el proceso de estática comparativa seria:

$$\begin{aligned} y &= C_0 + c\,y + I + G + X - M \\ dy &= dC_0 + c\,dy + dI + dG + dX - dM \\ dy - c\,dy &= dC_0 + dI + dG + dX - dM \\ dy\,(1-c) &= dC_0 + dI + dG + dX - dM \end{aligned}$$

Teniendo que aplicar la cláusula "Ceteris Paribus" respectiva y luego reordenar la ecuación para obtener el cociente de los diferenciales.

Por ejemplo, ante un aumento del gasto público se daría que "$dC_0 = 0$", "$dI = 0$", "$dX = 0$" y "$dM = 0$", por lo que la ecuación nos quedaría:

$$dy\,(1-c) = dG$$

Que al reordenarla obtendríamos:

$$\frac{dy}{dG} = \frac{1}{1-c}$$

4. Un Modelo Simple de Oferta y Demanda

4.1. Introducción al Modelo

Retomemos uno de los primeros modelos que se aprenden en economía, el "Modelo de Oferta y Demanda".

Imagine un mercado al que oferentes y demandantes concurren para transar cierto bien. Mientras que los oferentes estarán dispuestos a ofrecer mayor cantidad de bienes cuanto más alto sea el precio, los demandantes tendrán el comportamiento opuesto.

Dado esto tendremos una ecuación que representara la conducta de los oferentes y otra ecuación para describir a la demanda. Por simplicidad supongamos que la relación entre precios y cantidades en

cada una de estas dos ecuaciones es lineal. Así el modelo quedara conformado por el siguiente sistema de ecuaciones:

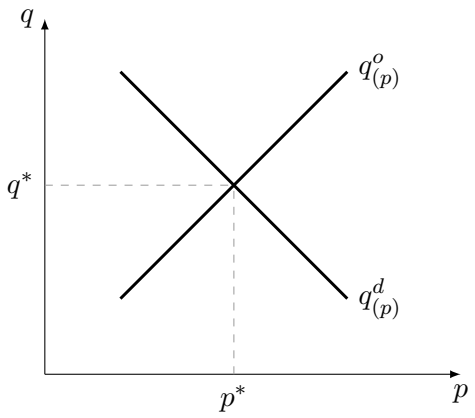
$$\begin{cases} q^d = a - b\,p \\ q^o = c + d\,p \end{cases}$$

con "a", "b", "c" y "d" positivos.

En equilibrio se debe dar que "q^o" sea igual a "q^d", por lo que si consideramos "$q = q^o = q^d$" el anterior sistema nos queda:

$$\begin{cases} q = a - b\,p \\ q = c + d\,p \end{cases}$$

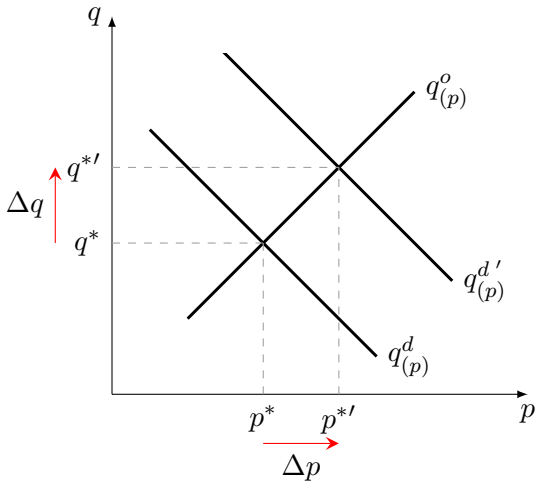
Gráficamente el modelo quedara de la siguiente manera[24]:



donde el equilibrio surge de la intersección de las dos rectas.

4.2. Estática Comparativa

A modo de ejemplo observemos que sucede si se incrementa el valor de "a":



[24]Al contrario de lo que sucede en la literatura económica, se ha decidido presentar en el eje de ordenadas a las cantidades y en el eje de abscisas a los precios para remarcar que "q" es una función de "p" y no al revés.

Dado que "a" es la ordenada al origen de la función de demanda, la recta de demanda se desplaza verticalmente manteniendo su inclinación. Esto ocasiona que se arribe a un nuevo equilibrio donde tanto el precio como la cantidad son mayores.

Pero tenemos que realizar el cálculo de cuanto aumenta el precio y en que valor se incrementa la cantidad.

Para esto, debemos primeramente tomar nota de que tenemos dos variables endógenas ("p" y "q") y dos variables exógenas ("a" y "c")[25].

Así, tomamos el sistema de ecuaciones que representa el modelo:

$$\begin{cases} q = a - b\,p \\ q = c + d\,p \end{cases}$$

Y lo diferenciamos:

$$\begin{cases} dq = da - b\,dp \\ dq = dc + d\,dp \end{cases}$$

Al reordenar las ecuaciones obtenemos:

$$\begin{cases} dq + b\,dp = da \\ dq - d\,dp = dc \end{cases}$$

Llegado este punto deberemos aplicar la cláusula "Ceteris Paribus" según que variable exógena se esté modificando. Continuemos con nuestro ejemplo en el que varía "a" mientras que "c" permanece constante de manera que se verifica que "$dc = 0$":

$$\begin{cases} dq + b\,dp = da \\ dq - d\,dp = 0 \end{cases}$$

Si dividimos todos los términos por "da" tendremos:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{da} + b\,\dfrac{dp}{da} = \dfrac{da}{da} \\ \dfrac{dq}{da} - d\,\dfrac{dp}{da} = \dfrac{0}{da} \end{cases}$$

Finalmente, simplificando, el sistema nos quedara:

$$\begin{cases} 1\,\dfrac{dq}{da} + b\,\dfrac{dp}{da} = 1 \\ 1\,\dfrac{dq}{da} - d\,\dfrac{dp}{da} = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones tiene dos incógnitas, "$\dfrac{dq}{da}$" y "$\dfrac{dp}{da}$", las cuales podemos averiguar mediante la "Regla de Cramer":

$$\frac{dq}{da} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & -d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{vmatrix}} = \frac{-d}{-d-b} = \frac{d}{d+b} > 0 \qquad \frac{dp}{da} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-d-b} = \frac{1}{d+b} > 0$$

[25]También tenemos dos parámetros, "b" y "d", los cuales los asumimos como fijos a corto plazo.

Como se observa, ambas incógnitas son positivas[26] lo cual es congruente con el grafico presentado al inicio de la sección en el que un aumento de la variable exógena "a" incrementaba el precio y la cantidad de equilibrio.

5. Modelo IS-LM

Para este modelo nos remitiremos a "Modelo IS-LM - Alejandro Agustín Fernández" en A. Garcia Venturini y A. Kicillof. Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencias Económicas. Ediciones Cooperativas, 2019. isbn: 987-98315-8-6. Páginas 157 a 164.

6. Modelo WS-PS

A incorporarse en el 2do cuatrimestre 2025.

7. Ejercicios

Ejercicios Modelo Keynesiano Simple

1) En el contexto del Modelo Keynesiano Simple hallé la expresión que da cuenta de como se ve afectada la producción de equilibrio cuando el gasto público aumenta en la misma cuantía que la que disminuye la inversión ("$dG = -dI$").

2) Suponga que incorporamos al Modelo Keynesiano Simple la hipótesis de que la inversión depende positivamente del "y" ("$I_y^{'} > 0$)"). ¿Cómo se ve afectada la producción ante un cambio en el gasto autónomo en este modelo? ¿Cómo se vio modificado el multiplicador del gasto?

3) Suponga que incorporamos al Modelo Keynesiano Simple la hipótesis de que las importaciones dependen positivamente del "y" ("$M_y^{'} > 0$)"). ¿Que pasara con la producción si se aumenta el gasto público? ¿Es seguro que la producción aumentara más que el gasto público?

Ejercicios Modelo de Oferta y Demanda

4) Halle como se ven afectadas la cantidad y el precio de equilibrio ante un aumento en la variable exógena "c".

5) Halle como se ven afectadas la cantidad y el precio de equilibrio ante un aumento de la misma cuantía en las variables exógenas "a" y "c" ("$da = dc$").

Ejercicios Modelo IS-LM

6) Hallar mediante el uso de diferenciales como se ve afectada la tasa de interés cuando se aumenta el gasto público.

7) Hallar mediante el uso de diferenciales como se ve afectado el producto cuando el Banco Central emite moneda, es decir cuando se incrementa el circulante monetario.

8) Hallar mediante el uso de diferenciales como se ve afectada la tasa de interés cuando el Banco Central emite moneda.

[26] Observe que también se da que "$\frac{dq}{da} = \frac{d}{d+b} < 1$", lo que implica que la cantidad de equilibrio aumenta menos que lo que aumenta "a".

9) ¿Cuál es el efecto sobre el producto y sobre la tasa de interés de un aumento del gasto financiado íntegramente con impuestos? (suponga que los impuestos son una constante y no una proporción del ingreso).

10) ¿Cuál es el efecto sobre el producto y sobre la tasa de interés de un aumento del gasto público financiado íntegramente con emisión monetaria?

Ejercicios Modelo WS-PS

A incorporarse en el 2do cuatrimestre 2025.

8. Respuestas Ejercicios

1) $\frac{dy}{dG} = 0$

2) $\frac{dy}{dA_0} = \frac{1}{(1 - c - I'_y)}$

Ahora el multiplicado del gasto es mayor.

3) $\frac{dy}{dA_0} = \frac{1}{(1 - c + M'_y)}$

No, ya no es seguro ya que el multiplicador ahora puede ser menor que 1.

4) $\frac{dq}{dc} = \frac{b}{d+b}$ $\qquad$ $\frac{dp}{dc} = \frac{-1}{d+b}$

5) $\frac{dq}{dc} = 1$ $\qquad$ $\frac{dp}{dc} = 0$

6) $\frac{dr}{dG} = \frac{-L'_y}{[1 - c(1-t) - I'_y]\ L'_r + L'_y\ I'_r}$

7) $\frac{dy}{dM} = \frac{I'_r\ \frac{1}{p}}{[1 - c(1-t) - I'_y]\ L'_r + L'_y\ I'_r}$

8) $\frac{dr}{dM} = \frac{[1 - c(1-t) - I'_y]\ \frac{1}{p}}{[1 - c(1-t) - I'_y]\ L'_r + L'_y\ I'_r}$

9) $\frac{dy}{dG} = \frac{(1-c)\ L'_r}{(1 - c - I'_y)\ L'_r + L'_y\ I'_r}$ $\qquad$ $\frac{dr}{dG} = \frac{-L'_y\ (1-c)}{(1 - c - I'_y)\ L'_r + L'_y\ I'_r}$

10) $\frac{dy}{dG} = \frac{L'_r + \frac{1}{p}\ I'_r}{[1 - c(1-t) - I'_y]\ L'_r + L'_y\ I'_r}$ $\qquad$ $\frac{dr}{dG} = \frac{[1 - c(1-t) - I'_y]\frac{1}{p} - L'_y}{[1 - c(1-t) - I'_y]\ L'_r + L'_y\ I'_r}$

Referencias

[1] A. Chiang. *Metodos Fundamentales En Economia Matematica*. McGraw-Hill Interamericana de España S.L., 2006. ISBN: 9789701056141.

[2] R. Dornbusch et al. *Macroeconomía*. McGraw-Hill, 2004. ISBN: 9788448141813.

[3] A. García Venturini y A. Kicillof. *Analisis Matemático II para estudiantes de Ciencias Económicas*. Ediciones Cooperativas, 2019. ISBN: 987-98315-8-6.